

для студентів спеціальності: 113 «Галузеве машинобудування»



$$m\vec{a}_C = \vec{F}$$

$$F_r = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = -\frac{r_2}{r_1}$$

.....

$$\frac{dH}{dt} = M_{z3}$$

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА, КІНЕМАТИКА:
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів спеціальності:*

113 «Галузеве машинобудування»;

спеціалізацій: «Інжиніринг, обладнання та технології хімічних та нафтопереробних виробництв»; «Інжиніринг, обладнання та технології целюлозно-паперових виробництв»; «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів та виробів»; «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання пакування»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

Теоретична механіка. Статика. Кінематика: Конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності: 113 «Галузеве машинобудування»; спеціалізацій: «Інжиніринг, обладнання та технології хімічних та нафтопереробних виробництв»; «Інжиніринг, обладнання та технології целюлозно-паперових виробництв»; «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів та виробів»; «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання пакування»: / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: Н.І. Штефан, В.М. Федоров. – Електронні текстові дані (1 файл: 11,2Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 13.05.2021р.) за поданням Вченої ради механіко-машинобудівного інституту (протокол № 9 від 26.04.2021 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА, КІНЕМАТИКА: КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів спеціальності: 113 «Галузеве машинобудування»

Укладачі: *Штефан Наталія Іллівна*, канд. техн. наук, доц.
Федоров Володимир Миколайович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор *Алексейчук О.М.*, канд.техн. наук, доц.

Рецензент *Степанюк А.Р.*, канд. техн. наук, доцент кафедри МАХНВ ІХФ
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Запропонований конспект лекцій створено для вивчення дисципліни «Теоретична механіка» в першому семестрі вивчення дисципліни згідно навчальної програми та робочої програми кредитного модуля. В ньому систематизовано викладені основні поняття та закони механіки; методи вивчення умов рівноваги і руху реальних фізичних об'єктів, які моделюють у вигляді матеріальної точки, твердого тіла і механічної системи; методи перетворення систем сил у інші, їм еквівалентні. Також розглянуті способи визначення кінематичних характеристик тіл та окремих його точок (аналітичні та графічні). Поряд з цим продемонстровано багато прикладів розв'язування задач. Цей конспект лекцій буде корисним не тільки студентам, які вивчають теоретичну механіку, а й молодим викладачам.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021

ЗМІСТ ЛЕКЦІЙ

| | Лекція | Стор. |
|---|--------|-------|
| Вступ до модуля | | 3 |
| Розділ 1. Вступ | 1 | 4 |
| <i>Тема 1.1. Вступ до дисципліни</i> | | |
| 1. Предмет теоретичної механіки | | |
| Розділ 2. Статика твердого тіла | | 5 |
| <i>Тема 2.1. Основні поняття та означення</i> | | |
| 2. Основні поняття та означення статички твердого тіла | | |
| 2.1. Сила, система сил | | |
| 2.2. Аксиоми про дві сили | | 6 |
| 2.3. Найпростіші теореми статички | 2 | 8 |
| <i>Тема 2.2. Способи перетворення різноманітних систем сил та умови їх рівноваги</i> | | |
| 2.4. Приклад: зведення збіжної системи сил до найпростішого вигляду | | 9 |
| 2.5. Правила побудови еквівалентних систем сил | | 10 |
| 2.6. Активні і пасивні сили. Аксиоми про в'язі | 3 | 11 |
| 2.7. Види в'язей та їх реакції | | 11 |
| 2.8. Зовнішні та внутрішні сили. Метод перерізів. | | 13 |
| 3. Момент сили відносно точки і осі. Пара сил | | 14 |
| 3.1. Момент сили відносно точки | | 14 |
| 3.2. Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил | | 15 |
| 3.3. Момент сили відносно осі | 4 | 16 |
| 3.4. Момент пари сил | | 17 |
| 3.5. Теореми про пари сил | | 18 |
| 4. Довільна просторова система сил та умови її рівноваги | 5 | 20 |
| 4.1. Лема про паралельний переніс сили | | 20 |
| 4.2. Головний вектор і головний момент довільної системи сил. Основна теорема статички твердого тіла (теорема Пуансо) | | 20 |
| 4.3. Залежність головного вектора і головного моменту від вибору центра зведення | | 22 |
| 4.4. Статичні інваріанти (незмінні) | | 23 |
| 4.5. Теорема Сомова (про зведення системи сил до двох сил) | 6 | 24 |
| 4.6. Умови рівноваги довільної просторової системи сил | | 25 |
| 4.7. Умови рівноваги системи сил в частинних випадках | | 25 |
| 4.8. Умови і рівняння рівноваги невільного твердого тіла | 7 | 29 |
| 4.9. Теорема про момент рівнодійної довільної системи сил | | 30 |
| 4.10. Тертя ковзання. Тертя кочення | 8 | 32 |
| 4.11. Приклади розв'язання задач статички (система двох тіл) | | 33 |
| Розділ 3. Кінематика | 9 | 36 |
| <i>Тема 3.1. Вступ</i> | | |
| <i>Тема 3.2. Кінематика точки</i> | | |
| 5. Кінематика точки в нерухомій системі координат | | 36 |
| 5.1. Способи задання руху точки | | 36 |
| 5.2. Поняття про годограф векторної функції. Похідна від векторної функції, яка задана у нерухомій системі координат, за скалярним аргументом | | 39 |

| | | |
|---|-----------|-----------|
| 5.3. Швидкість руху точки | 10 | 40 |
| 5.4. Прискорення руху точки | 11 | 43 |
| 6. Кінематика точки в рухомій системі координат | 12 | 46 |
| 6.1. Абсолютна і відносна похідні | | 46 |
| 6.2. Формула Бура | | 46 |
| Тема 3.3. Складний рух точки | | |
| 6.3. Основна задача складного руху точки | | 48 |
| 6.4. Кінематичні характеристики складного руху точки | | 49 |
| 6.5. Формули перетворення швидкостей точки при її складному русі | 13 | 50 |
| 6.6. Формули перетворення прискорень при складному русі точки | | 50 |
| 7. Кінематика твердого тіла | 14 | 54 |
| Тема 3.4. Найпростіші рухи твердого тіла | | |
| 7.1. Поступальний рух твердого тіла | | 54 |
| 7.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі | | 55 |
| а) Кінематичне рівняння руху | | 55 |
| б) Лінійна швидкість точки та кутова швидкість тіла | | 56 |
| в) Лінійне прискорення точки та кутове прискорення тіла | 15 | 58 |
| г) Прості передачі. Формули Вілліса | | 60 |
| Тема 3.5. Плоскопаралельний рух твердого тіла | | |
| 7.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла | 16 | 61 |
| а) Лінійна швидкість точки та кутова швидкість тіла | | 61 |
| б) Миттєвий центр швидкостей (МЦШ) | 17 | 64 |
| в) Лінійне прискорення точки та кутове прискорення тіла | 18 | 67 |
| г) Миттєвий центр прискорень (МЦП) | 19 | 70 |
| Тема 3.6. Сферичний рух твердого тіла | | |
| 7.4. Сферичний рух твердого тіла | 20 | 74 |
| а) Кути Ейлера та кінематичні рівняння сферичного руху | | 74 |
| б) Миттєво-обертальний рух твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Миттєва кутова швидкість тіла | | 76 |
| в) Кутове прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої точки | | 77 |
| г) Лінійна швидкість точки тіла | 21 | 79 |
| д) Розподіл лінійних прискорень точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки | | 80 |
| Тема 3.7. Складний рух твердого тіла | | |
| 7.5. Складний рух твердого тіла | 22 | 82 |
| а) Додавання обертань твердого тіла навколо осей, що перетинаються | | 82 |
| б) Додавання обертань твердого тіла навколо паралельних осей | | 83 |
| в) Метод зупинення | | 85 |
| 8. Порівняльний аналіз кінематичних характеристик точок і твердих тіл при різних видах руху | 23 | 86 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ | | 88 |

Лекція 1

Розділ 1. Вступ

Тема 1.1. Вступ до дисципліни

1. Предмет теоретичної механіки

Наскільки відомо сучасній науці об'єктивна реальність (матерія) може існувати у вигляді *речовини*, з якої складаються всі фізичні тіла, і *поля*, яке вони можуть створювати, в якому можуть рухатися і з яким взаємодіяти. Основними поняттями теоретичної механіки є поняття *простору, часу, руху матерії*.

Під *рухом матерії* розуміють будь-які її зміни, які відбуваються при хімічних, теплових та інших процесах. *Механічним рухом* називається найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простих переміщень у просторі (з одного положення в інше) і часі. Система наук про найпростіші форми руху матерії утворює *загальну механіку*.

Теоретична механіка – це наука про найбільш загальні закони механічного руху матерії, головною задачею якої є пізнання кількісних закономірностей реальних рухів фізичних тіл.

В теоретичній механіці використовуються наступні моделі фізичних тіл: матеріальна точка, система матеріальних точок, абсолютно тверде тіло та система абсолютно твердих тіл.

Матеріальною точкою називається найпростіша модель фізичного тіла довільної форми, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати, і яка, в свою чергу, має властивість інертності і здібність взаємодіяти з іншими тілами.

Системою матеріальних точок називають сукупність матеріальних точок, положення і рух яких взаємозв'язані.

Незмінною називається така система матеріальних точок, в якій взаємне розташування точок, що їй належать, залишається незмінним. Якщо незмінна система матеріальних точок неперервно заповнює деяку частину простору, тоді така система називається *абсолютно твердим тілом*. Із властивостей незмінної системи впливає, що відстань між двома довільно вибраними точками абсолютно твердого тіла не змінюється при його русі.

В основі теоретичної механіки лежать *три закони Ньютона*. Для їх формулювання введемо поняття *інерціальної системи відліку* (ICB), під якою розуміємо таку систему відліку, по відношенню до якої ізолювана матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху. Система, яка не має цих властивостей, називається *неінерціальною*.

I-й закон Ньютона: *будь-яке тіло знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху доки і оскільки воно не змушується прикладеними силами змінити свій стан.*

Для формулювання II-го закону Ньютона треба ввести поняття кількості руху матеріальної точки. *Кількістю руху матеріальної точки* називається добуток маси точки на її швидкість:

$$\vec{q} = m\vec{v}.$$

II-й закон Ньютона: зміна кількості руху матеріальної точки пропорційна прикладеній силі і відбувається вздовж тієї ж прямої, по якій діє сила:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

III-й закон Ньютона: дії завжди відповідає рівна їй за величиною і протилежна за напрямком протидія, тобто дії двох тіл одного на інше завжди рівні і напрямлені вздовж однієї прямої в різні боки.

Даний курс теоретичної механіки, розбитий на два модулі, складається з чотирьох основних розділів:

Модуль НФ-06/1

1. *статики – розділу механіки, в якому вивчається рівновага матеріальних тіл, та зведення систем сил до найпростішого (еквівалентного) вигляду;*
2. *кінематики, яка вивчає рух тіл з геометричної точки зору, тобто без урахування причин, які викликали цей рух;*

Модуль НФ-06/2

3. *динаміки, яка вивчає рух тіл з урахуванням причин (зовнішніх сил), які викликали цей рух.*
4. *аналітичної механіки, яка надає можливість більш ефективно складати необхідні математичні моделі руху і умови рівноваги механічних систем, використовуючи теорію можливих переміщень і теорію узагальнених координат.*

Розділ 2. Статика твердого тіла

Тема 2.1. Основні поняття та означення

2. Основні поняття та означення статички твердого тіла

Статика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються різноманітні системи сил та методи перетворення одних систем сил в інші, їм еквівалентні, а також умови рівноваги систем сил, що діють на тверде тіло.

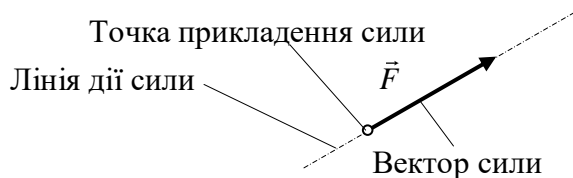
2.1. Сила, система сил

Величина, що є мірою механічної дії одного тіла (або поля) на інше, називається *силою*.

Зазвичай використовується математична модель сили у вигляді зв'язаного вектора, тому що вказана дія характеризується:

- напрямком;
- точкою прикладення (тією матеріальною часткою, на яку діє сила);
- чисельним значенням, що називається *модулем сили* ($|\vec{F}| \equiv F$).

Дія сили на матеріальну точку залежить від напрямку сили і її величини (рис 2.1).



Напрямком сили є той напрямок, в якому матеріальна точка рухатиметься під дією сили.

Пряма, по якій напрямлена сила, називається *лінією дії* сили.

Рис. 2.1. До означення сили.

Під *системою сил* будемо розуміти сукупність двох або більшої кількості сил, прикладених до твердого тіла (або точки). Систему n -сил будемо позначати наступним чином: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \equiv \{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$, або, якщо не виникає непорозуміння, - у скороченому вигляді: $\{\vec{F}_i\}$.

Наведемо деякі інші **означення**, пов'язані з поняттями сили і системи сил.

- Сила, прикладена до тіла в одній точці, називається *зосередженою*.
- Сили, прикладені до всіх точок даної поверхні твердого тіла або його об'єму, називаються *розподіленими*.
- Дві системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \equiv \{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$ та $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m\} \equiv \{\vec{P}_i\}_{i=1}^m$ є *еквівалентними*, якщо не порушуючи стан твердого тіла, одну систему сил можна замінити іншою. Це позначається так: $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n \sim \{\vec{P}_i\}_{i=1}^m$.
- Якщо систему сил $\{\vec{F}_i\}$ можна замінити однією еквівалентною силою \vec{F} , тоді така сила називається *рівнодією* даної системи сил. В цьому разі сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ називаються *складовими* сили \vec{F} .
- Матеріальна точка знаходиться в *рівновазі* по відношенню до ІСВ, якщо вона знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху.
- Система матеріальних точок знаходиться в *рівновазі* по відношенню до ІСВ, якщо всі точки цієї системи знаходяться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху з рівними за величиною і однаковими за напрямком швидкостями.
- Якщо тіло під дією системи сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$ знаходиться в рівновазі, то така система сил називається *зрівноваженою (еквівалентною нулю)*, що позначається наступним чином: $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n \sim \vec{0}$.
- Система сил називається *збіжною*, якщо лінії дії всіх сил, прикладених до твердого тіла, перетинаються в одній точці. Збіжна система сил може бути *плоскою* (лінії дії всіх сил розташовані в одній площині), або *просторовою*.
- Сили, лінії дії яких є паралельними, утворюють *систему паралельних сил*, яка може бути *плоскою* або *просторовою*.
- Якщо система сил не є збіжною, або системою паралельних сил, то вона є *довільною* (і може також бути *плоскою* або *просторовою*).

2.2. Аксиоми про дві сили

Аксиома 1 (про дві сили): дві сили, прикладені до твердого тіла є зрівноваженими, якщо вони рівні за величиною і діють вздовж однієї лінії в протилежних напрямках (рис. 2.2).

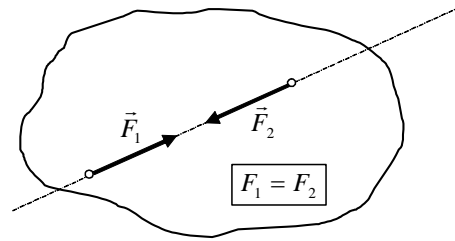
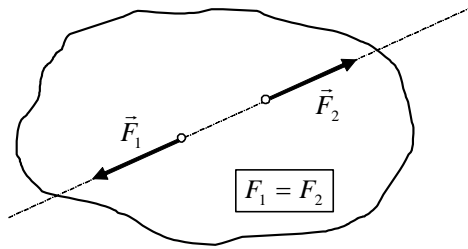


Рис. 2.2. До аксіоми про дві сили.

Ця аксіома справедлива для твердих тіл (для деформованих тіл вона не виконується).

Аксіома 2 (про паралелограм сил): дві сили, прикладені до твердого тіла в одній точці під кутом одна до одної, мають рівнодійну, яка визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах цих сил як на сторонах (рис. 2.3):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\vec{F}_1; \vec{F}_2)}.$$

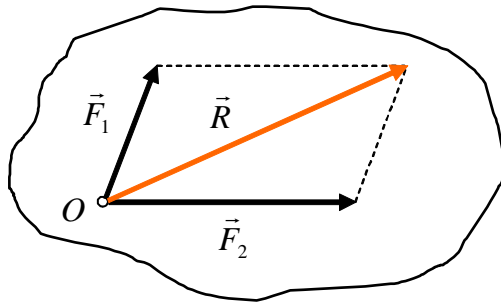


Рис. 2.3. Паралелограм сил.

Таким чином, аксіома 2 повністю визначає рівнодійну, а саме: точку прикладання, величину рівнодійної та її напрямок.

Із цієї аксіоми випливає правило векторного додавання n -сил, прикладених до однієї точки твердого тіла (рис. 2.4). Для цього необхідно побудувати багатокутник наступним чином: до вектора \vec{F}_1 додати (добудувати) вектор, який геометрично дорівнює \vec{F}_2 , потім до нього добудувати вектор, який геометрично дорівнює \vec{F}_3 , і т. д.

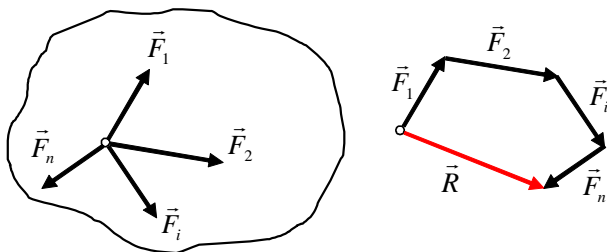
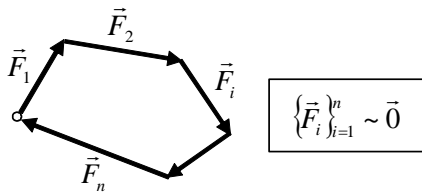


Рис. 2.4. Векторний багатокутник.

Вектор, проведений із точки прикладення всіх сил в останню вершину многокутника є *рівнодійною*: $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$, а побудований таким чином многокутник називається *силовим*, або *многокутником сил*¹.

Якщо кінець останнього з векторів, що додаються, збігається з початком першого, то многокутник сил є замкненим (рис. 2.5), а відповідна система сил – *зрівноваженою* ($\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n \sim \vec{0}$).



Тоді маємо

$$\vec{R} = \vec{0} \text{ або } \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Умова замкненості силового многокутника виражає умову зрівноваженості системи сил у графічній формі.

Рис. 2.5. Замкнений силовий многокутник.

Аксиома 3: сили, з якими два тіла діють одне на друге, рівні за величиною і протилежні за напрямком, не є зрівноваженими, оскільки вони прикладені до різних тіл (рис. 2.6).

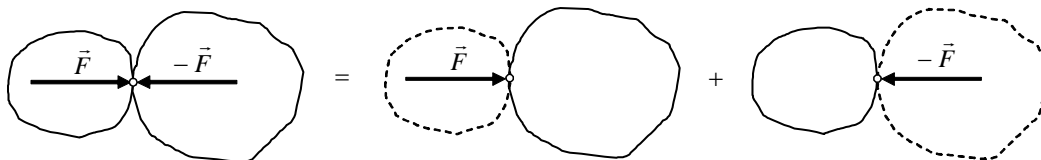


Рис. 2.6. Дія та протидія.

¹ Тут і надалі символ \sum або \sum_i означає $\sum_{i=1}^n$, якщо не говориться про інше.

Лекція 2

2.3. Найпростіші теореми статички

Теорема 1 (про силу як ковзний вектор): дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо цю силу перенести вздовж лінії її дії в будь-яку іншу точку твердого тіла (рис. 2.7).

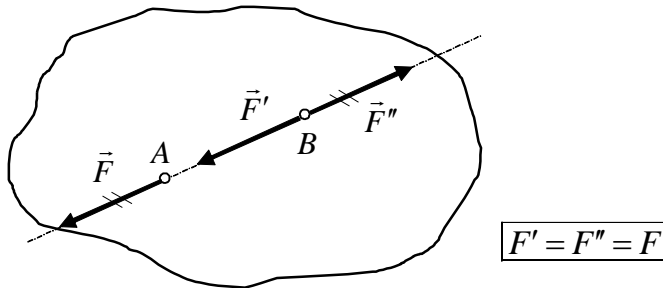


Рис. 2.7. Сила як ковзний вектор.

Д о в е д е н н я

Нехай до точки A тіла прикладена сила \vec{F} .

За аксіомою про дві сили прикладаємо до т. B на лінії дії сили \vec{F} систему зрівноважених сил $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \sim \vec{0}$. Тоді сила \vec{F} , прикладена в т. A , і сила \vec{F}'' , прикладена в т. B , теж утворюють зрівноважену систему сил, яку можна відкинути. Таким чином, залишилася лише сила \vec{F}' в

т. B , що і вимагалось довести (оскільки $F' = F$, і сили \vec{F} та \vec{F}' мають однакові напрямки).

Теорема 2 (про три сили): якщо тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, лінії дії двох з яких перетинаються, тоді всі три сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці (рис. 2.8).

Д о в е д е н н я

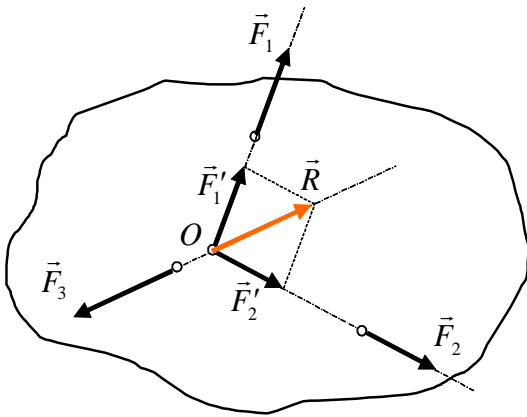
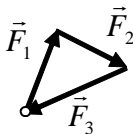


Рис. 2.8. До теореми про три сили.

Оскільки тіло знаходиться в рівновазі, то система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ зрівноважена, тобто $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \vec{0}$.

Використовуючи теорему 1, переносимо сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 вздовж ліній їх дії в т. O . Далі, скориставшись аксіомою 2, знаходимо рівнодійну \vec{R} сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , тоді $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \{\vec{R}, \vec{F}_3\}$.

Оскільки тіло знаходиться в рівновазі під дією системи сил $\{\vec{R}, \vec{F}_3\}$, то, скориставшись аксіомою про дві сили, робимо висновок, що сили \vec{F}_3 і \vec{R} діють вздовж однієї лінії і мають однакову величину



Наслідок: при виконанні умов теореми про три сили відповідний силовий трикутник буде замкненим (рис. 2.9).

Рис. 2.9. Замкнений силовий трикутник.

Для рівноваги твердого тіла під дією трьох непаралельних сил необхідно (але недостатньо), щоб всі три сили лежали в одній площині, а їх лінії дії перетиналися в одній точці.

Зауважимо, що сукупність двох сил, рівних за величиною і протилежних за напрямком, можна розглядати як **векторний нуль** (або нуль-вектор $\vec{0}$), додавання або відкидання якого до системи сил, прикладених до твердого тіла, не змінює початкового стану останнього.

Тема 2.2. Способи перетворення різноманітних систем сил та умови їх рівноваги

2.4. Приклад: зведення збіжної системи сил до найпростішого вигляду

Система сил називається **збіжною**, якщо лінії дії всіх сил, прикладених до твердого тіла, перетинаються в одній точці.

Нехай на тверде тіло діє система збіжних сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$ (рис. 2.10). Введемо праву систему координат $Oxyz$. За аксіомами 1 і 2 маємо

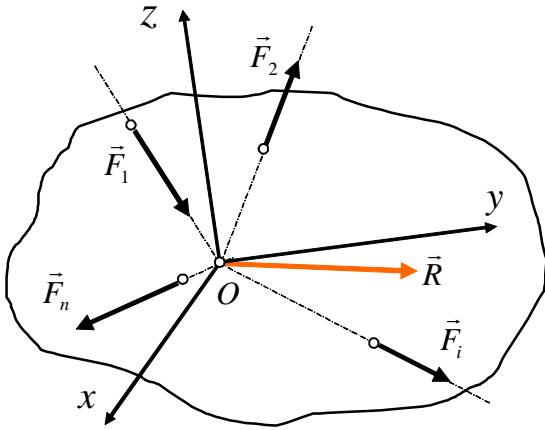


Рис. 2.10. Рівнодійна збіжної системи сил.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i, \quad (2.1)$$

або

$$R_x = \sum_i F_{ix}, \quad R_y = \sum_i F_{iy}, \quad R_z = \sum_i F_{iz}. \quad (2.2)$$

Тоді модуль вектора \vec{R} визначається за формулою

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad (2.3)$$

а його напрямні косинуси мають вигляд

$$\cos(\vec{R}; Ox) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\vec{R}; Oy) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\vec{R}; Oz) = \frac{R_z}{R}. \quad (2.4)$$

Формули (2.1) - (2.4) повністю визначають рівнодійну системи збіжних сил.

Умовою рівноваги системи збіжних сил є рівність нуль-вектору рівнодійної, тобто

$$\vec{R} = \vec{0}, \quad (2.5)$$

звідки матимемо

$$R_x = \sum_i F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_i F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_i F_{iz} = 0. \quad (2.6)$$

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно, щоб алгебричні суми проекцій всіх сил на осі Ox , Oy і Oz дорівнювали нулю.

В графічній формі умова рівноваги системи збіжних сил зображується у вигляді замкненого багатокутника сил.

2.5. Правила побудови еквівалентних систем сил

Ці правила зводяться до наступного.

- Силу як ковзний вектор можна переносити в будь-яку точку твердого тіла вздовж лінії її дії.
- До будь-якої системи сил можна додавати або відкидати зрівноважену систему сил (векторний нуль).
- Сили, прикладені до однієї точки твердого тіла, можна замінити еквівалентною силою – рівнодійною.
- Будь-яку силу можна розкласти на декілька складових.

Лекція 3

2.6. Активні і пасивні сили. Аксиоми про в'язі

Тверде тіло називається *вільним*, якщо в довільний момент часу довільним чином можна задати його рух, підібравши визначеним чином активні сили – сили взаємодії.

Якщо рух тіла обмежений деякими в'язями, то воно називається *невільним*. В'язями називаються обмеження, що накладені на рух твердого тіла.

Між тілом і в'яззю існує механічна взаємодія. Вплив тіла на в'язь називається *дією*, а зворотна дія в'язі на тіло називається *протидією*.

Протидія в'язі, прикладена до даного тіла, називається *реакцією в'язі*. Іншими словами, реакція в'язі – це сила, яка виражає тільки протидію в'язі. В задачах механіки реакції в'язей завжди потребують визначення на відміну від активних сил, величини та напрямки яких завжди задані. Модуль і напрямок реакції в'язі залежить від активних сил, прикладених до тіла. У разі відсутності активних сил і руху тіла реакція в'язі завжди дорівнює нулю.

Активні сили можуть змусити рухатись тіла, що знаходяться в спокої, реакції ж в'язей ніколи не можуть надати тілу рух. Тому реакції в'язей називають *пасивними силами*.

Розглянемо дві аксиоми про в'язі.

Аксиома 1 (про звільнення від в'язей): *не змінюючи механічного стану тіла, в'язі, які накладені на це тіло, можна уявно відкинути, якщо замінити їх дію відповідними реакціями.*

Наслідок: *будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, якщо скористатися аксіомою 1 і замінити в'язі відповідними реакціями, прикладеними до даного тіла.*

Аксиома 2 (про накладання нових в'язей): *рівновага твердого тіла не порушиться при накладанні нових в'язей.*

2.7. Види в'язей та їх реакції

Нехай тіло G знаходиться на поверхні S (див. рис. 2.11). Тоді поверхня S є в'яззю для тіла G .

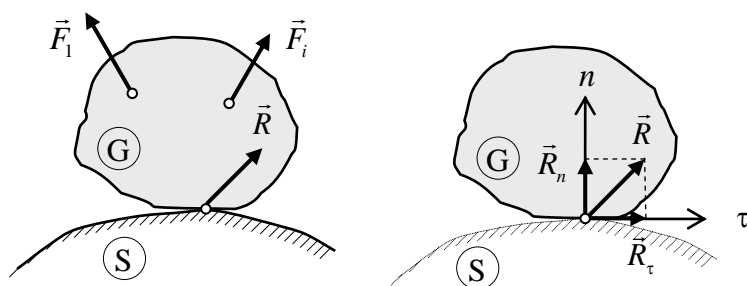


Рис. 2.11. До визначення реакції в'язі.

Реакція в'язі (\vec{R}) відповідає тому напрямку, вздовж якого в'язь S заважає переміщенню тіла G . На рисунку n - є спільною нормаллю до поверхонь G і S , а τ відповідає напрямку спільної дотичної до поверхонь G і S .

Дослідним шляхом встановлено, що дотична складова реакції в'язі (\vec{R}_τ) виникає в результаті обмежень, пов'язаних із ковзанням тіла G по поверхні S . До цих обмежень належать: обробка поверхні, вид матеріалу, і таке інше, - тобто все, що пов'язане з явищем *тертя*. Тому силу \vec{R}_τ називають *силою тертя*. В тих випадках, коли \vec{R}_τ можна знехтувати, поверхні тіл називають *ідеально гладенькими*.

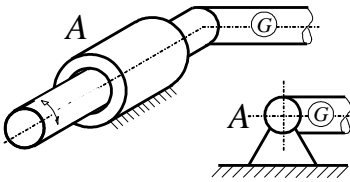
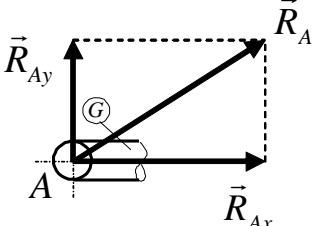
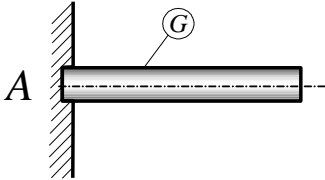
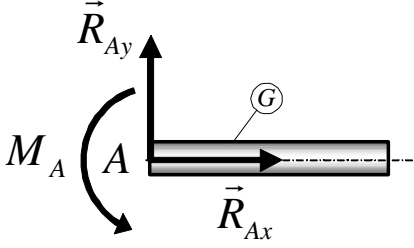
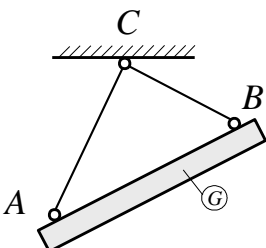
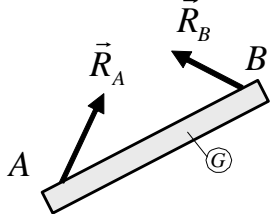
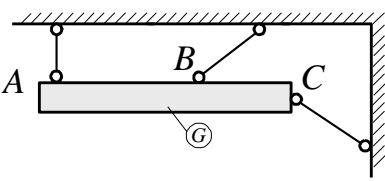
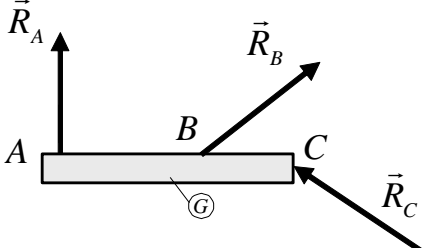
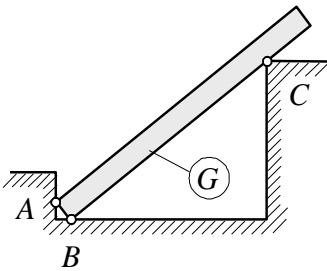
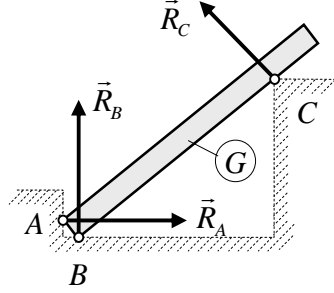
Реакція \vec{R} в таких випадках зводиться тільки до нормальної складової \vec{R}_n .

Висновок: для ідеально гладенької поверхні реакція в'язі завжди напрямлена за нормаллю до поверхні.

Види в'язей, що найчастіше зустрічаються в механіці, наведені у наступній табл. 1.

Таблиця 1. Види в'язей та їх реакції

| | | | |
|----|---------------------------|--|--|
| 1. | Гладенька опорна поверхня | | |
| 2. | Рухомий шарнір (коток) | | |

| | | | |
|----|---|---|---|
| 3. | Нерухомий шарнір |  |  |
| 4. | Консольне (жорстке) зацмлення |  |  |
| 5. | Гнучка в'язь (трос, нитка, ланцюг) |  |  |
| 6. | Жорсткий (ідеальний) стрижень, на кінцях якого точкові шарніри |  |  |
| 7. | Опора тіла на гладеньке ребро, або тіло ребром спирається на гладеньку поверхню |  |  |

2.8. Зовнішні та внутрішні сили. Метод перерізів

Зовнішніми називаються сили, які викликані взаємодією тіл, що не входять до однієї системи.

Внутрішніми називаються сили взаємодії між матеріальними точками однієї й тієї ж системи (див. рис. 2.12).

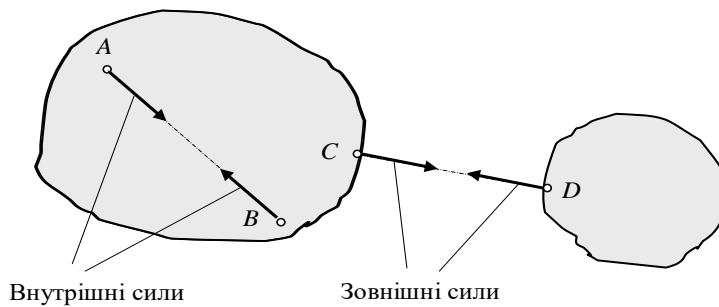
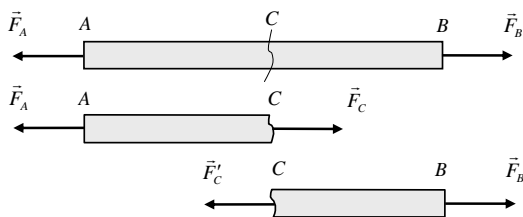


Рис. 2.12. Внутрішні і зовнішні сили.

Внутрішні сили можна розглядати як систему дії або протидії між точками однієї системи (або твердого тіла). Внутрішні сили являють собою систему сил, еквівалентну нулю.

Висновок: на стан твердого тіла внутрішні сили не впливають.

Розглянемо приклад визначення сили взаємодії в перерізі C тіла (стрижня) AB , що знаходиться в рівновазі під дією двох зовнішніх сил \vec{F}_A і \vec{F}_B . Для цього проведемо переріз у точці C (рис. 2.13) і окремо розглянемо рівновагу частин AC і CB стрижня. За аксіомою про дві сили маємо: $F_A = F_C$, $F'_C = F_B$, і можна визначити внутрішні сили \vec{F}_C або \vec{F}'_C .



Наведений метод перерізів дозволяє перевести внутрішні сили до категорії зовнішніх сил, після чого їх можна визначити відомими методами.

Рис. 2.13. До методу перерізів.

3. Момент сили відносно точки і осі. Пара сил

3.1. Момент сили відносно точки

Моментом сили \vec{F} відносно точки (центра) O називається величина, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора \vec{r} , проведеного з т. O в т. A прикладення сили, на цю силу \vec{F} (див. рис. 3.1), тобто

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F};$$

модуль цього вектора є

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}; \vec{F}), \quad (3.1)$$

звідки, якщо взяти до уваги, що $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, а також те, що найкоротша

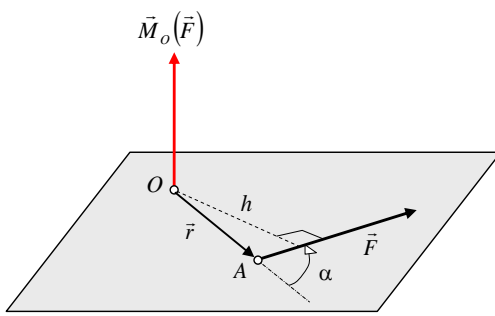


Рис. 3.1. Момент сили відносно точки.

відстань від центру O до лінії дії сили \vec{F} (плече сили) дорівнює

$$h = r \cdot \sin(\hat{r}; \vec{F}), \quad (3.2)$$

отримаємо

$$M_O = F \cdot h. \quad (3.3)$$

Висновок: величина моменту сили відносно центра O дорівнює добутку сили на плече дії сили.

Вектор моменту сили відносно центра O є перпендикулярним до площини, що проходить через т. O та лінію дії сили \vec{F} , і напрямлений в той бік, звідки можливе обертання тіла під дією сили \vec{F} відбувається проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.1).

Визначимо проекції вектора моменту сили відносно точки на осі системи координат (рис. 3.2).

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}, \quad (3.4)$$

де $\{x, y, z\}$ - проекції радіус-вектора \vec{r} , а $\{F_x, F_y, F_z\}$ - проекції сили \vec{F} на відповідні координатні осі. З іншого боку

$$\vec{M}_O = M_{Ox} \vec{i} + M_{Oy} \vec{j} + M_{Oz} \vec{k}. \quad (3.5)$$

Порівнюючи вирази (4) і (5), отримаємо

$$\begin{cases} M_{Ox} = yF_z - zF_y, \\ M_{Oy} = zF_x - xF_z, \\ M_{Oz} = xF_y - yF_x. \end{cases} \quad (3.6)$$

Модуль моменту сили відносно точки визначиться за формулою

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} \quad (3.7)$$

а напрямок – напрямними косинусами

$$\begin{cases} \cos(\vec{M}_O; \vec{i}) = M_{Ox} / M_O, \\ \cos(\vec{M}_O; \vec{j}) = M_{Oy} / M_O, \\ \cos(\vec{M}_O; \vec{k}) = M_{Oz} / M_O. \end{cases} \quad (3.8)$$

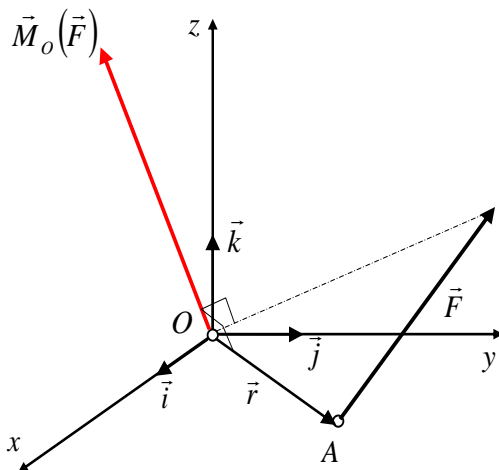


Рис. 3.2. Напрямок моменту сили відносно точки.

Запишемо **властивості моменту сили відносно точки**.

1) Якщо перемістити силу вздовж її лінії дії в будь-яку точку, момент цієї сили відносно центра зміниться (див. рис. 3.3).

2) Якщо лінія дії сили \vec{F} проходить через центр O , то момент цієї сили відносно т. O завжди дорівнює нулю (рис. 3.4).

3) Величина моменту сили відносно центра O дорівнює подвоєній площі трикутника OAB :
 $M_O(\vec{F}) = 2S_{\triangle OAB}$ (див. рис. 3.5).

3.2. Теорема про момент рівнодійної системи збіжних сил

Теорема Варіньона: момент рівнодійної системи збіжних сил відносно деякого центра O дорівнює векторній сумі моментів всіх сил, що входять в систему, відносно того ж самого центра O .

Д о в е д е н н я

Розглянемо збіжну систему сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$. Замінімо її рівнодійною \vec{R} . Виберемо довільний центр O , тоді (див. рис. 3.6 і 3.7)

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i).$$

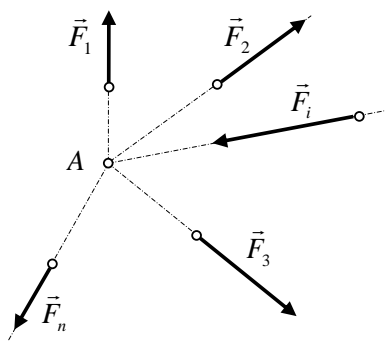


Рис. 3.6. Вихідна система сил.

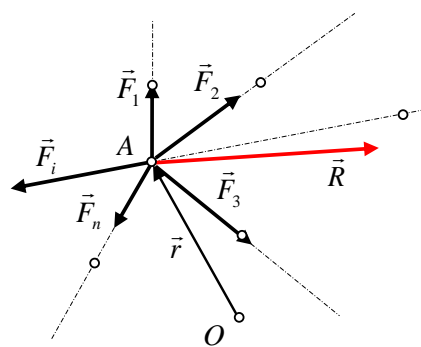


Рис. 3.7. Зведена система сил.

Лекція 4

3.3. Момент сили відносно осі

Моментом сили відносно осі називається скалярна величина, що дорівнює проекції на цю вісь момента даної сили відносно довільної точки цієї осі (див. рис. 3.8).

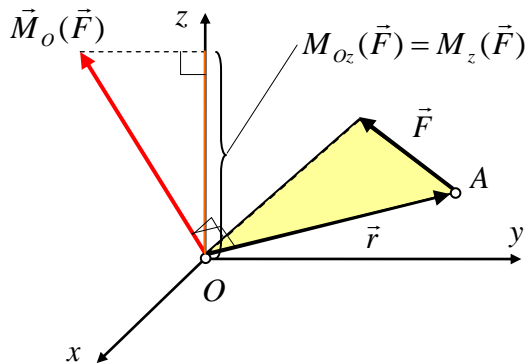


Рис. 3.8. Момент сили відносно осі.

Проекції вектора момента сили \vec{F} відносно центра O визначені формулами (3.6) попередньої лекції. Ці ж самі співвідношення визначають величини моментів сили \vec{F} відносно осей Ox , Oy і Oz (за означенням), і оскільки моменти сил відносно координатних осей не залежать від вибору т. O , то

$$M_{Ox} = M_x, \quad M_{Oy} = M_y, \quad M_{Oz} = M_z.$$

Цими позначеннями будемо користуватися і надалі.

Робоче правило для обчислення моменту сили відносно осі (див. рис. 3.9)

- Будуємо площину N , яка перпендикулярна до осі z , відносно якої необхідно знайти момент сили. Визначаємо точку перетину площини N з вказаною віссю (т. O).
- Визначаємо допоміжний вектор \vec{F}_N у площині N , що є проекцією на площину N сили \vec{F} .
- Визначаємо момент вектора \vec{F}_N відносно точки O . Модуль знайденої величини і буде шуканим моментом сили відносно осі.

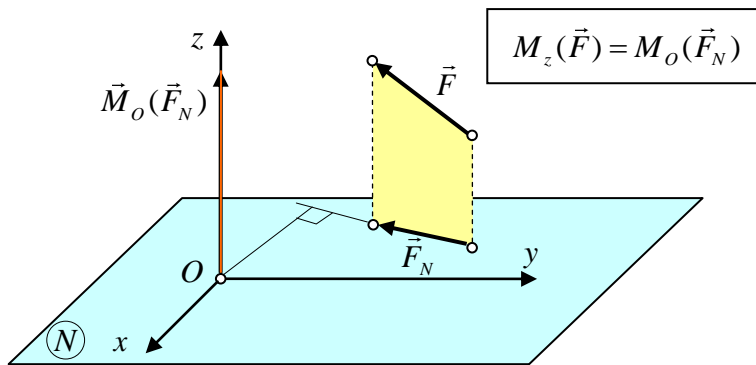


Рис. 3.9. До робочого правила обчислення моменту сили відносно осі.

Момент сили відносно осі вважається *додатним*, якщо спостерігачеві, що дивиться з додатного напрямку вказаної осі, обертання тіла під дією сили \vec{F} бачиться таким, що відбувається проти руху стрілки годинника, в супротивному випадку момент сили відносно осі вважається *від'ємним*.

Якщо сила і вісь лежать в одній площині, тоді момент сили відносно цієї осі завжди дорівнює нулю.

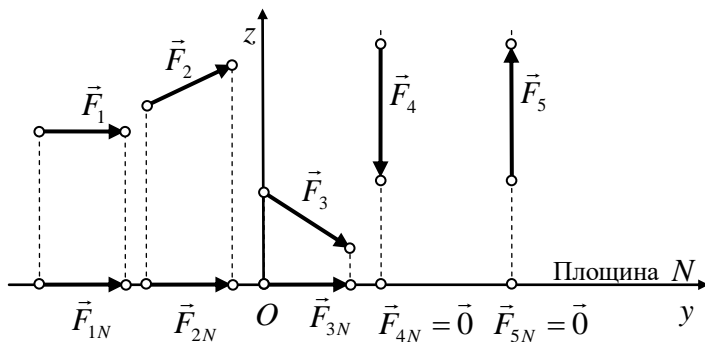
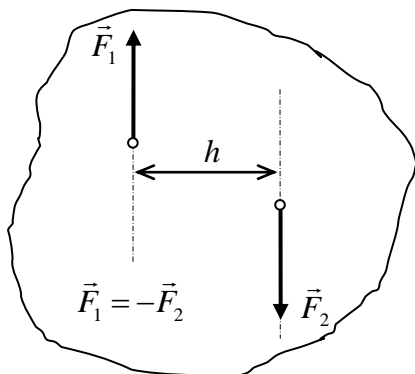


Рис. 3.10. Сили, моменти яких відносно осей Oy і Oz дорівнюють нулю.

Наприклад, моменти всіх вказаних на рис. 3.10 сил, що лежать у площині Oyz , відносно осей Oz і Oy дорівнюють нулю, тому що всі ці сили або паралельні до цих осей, або перетинають їх. Тоді за робочим правилом або проекції \vec{F}_N цих сил дорівнюють $\vec{0}$, або їх плечі є нульовими.

3.4. Момент пари сил

Парою сил, прикладених до твердого тіла, називають сукупність двох рівних за величиною і паралельних сил, що діють у протилежних напрямках вздовж незбіжних ліній дії (див. рис. 3.11).



Площина, в якій лежать ці дві сили, називається *площиною дії*. Плечем пари (h) називається найкоротша відстань між паралельними лініями дії. Пара сил ніколи не зводиться до рівнодійної.

Припустимо, що пара сил зводиться до рівнодійної. Тоді справедливо:

$$\{\vec{F}, -\vec{F}\} \sim \vec{0}.$$

Рис. 3.11. Пара сил.

Дослідним шляхом встановлено, що пара сил $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ надає тілу обертання.

Для визначення величини, яка описує обертальний ефект, знайдемо векторну суму моментів сил, що утворюють пару, відносно довільної точки O простору. Послідовно знаходимо вектори $\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}$, $\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$, та їх суму:

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{\rho} \times \vec{F},$$

де $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}$.

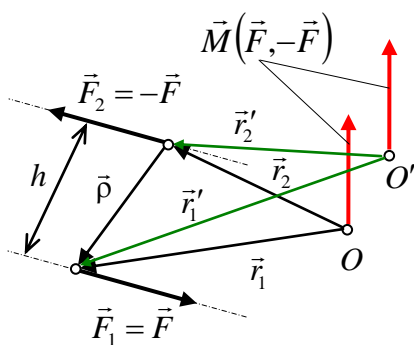


Рис. 3.12. Момент пари сил.

Ця сума моментів називається *моментом пари сил* і позначається $\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F})$ (див. рис. 3.12), тобто

$$\vec{M}(\vec{F}, -\vec{F}) = \vec{\rho} \times \vec{F}.$$

Зауважимо, що момент пари сил не змінюється при зміні центру O на інший (наприклад, O'), оскільки

$$\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{\rho}.$$

Величина моменту пари сил визначається так:

$$M(\vec{F}, -\vec{F}) = \rho F \sin(\vec{\rho} \hat{;} \vec{F}) = hF,$$

де плече пари $h = \rho \sin(\vec{\rho} \hat{;} \vec{F})$. Таким чином, момент пари сил за величиною дорівнює добутку плеча пари на модуль сили, що утворює пару. Момент пари сил є *вільним* вектором.

Момент пари сил є перпендикулярним до площині пари і напрямлений в ту частину простору, звідки обертання тіла під дією пари сил бачиться таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки.

3.5. Теорема про пари сил

Теорема 1: не змінюючи дії пари на тверде тіло, пару можна переносити і повертати у площині її дії, змінюючи при цьому плече і силу так, щоб момент пари залишався незмінним (без доведення).

Теорема 2: пара сил $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}$ є зрівноважувальною для пари сил $\{\vec{F}_2, -\vec{F}_2\}$, що лежить в тій же площині, якщо моменти цих пар рівні за величиною і протилежно напрямлені (див. рис. 3.13).

Д о в е д е н н я

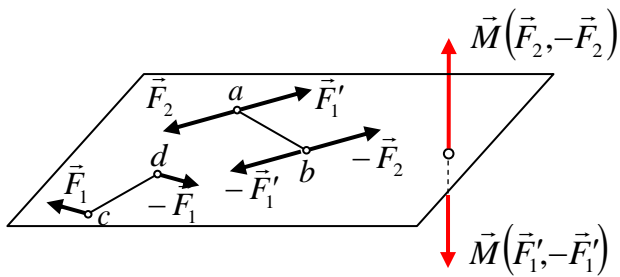


Рис. 3.13. Зрівноважені пари сил.

За теоремою 1 перенесемо пару сил $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}$ у площині дії пари, змінюючи плече cd на ab , а силу \vec{F}_1 на \vec{F}_1' .

Зауважимо, що

$$\vec{M}(\vec{F}_2, -\vec{F}_2) = \vec{ba} \times \vec{F}_2,$$

$$\vec{M}(\vec{F}_1', -\vec{F}_1') = \vec{ba} \times \vec{F}_1'.$$

Тоді

$$\vec{M}(\vec{F}_2, -\vec{F}_2) + \vec{M}(\vec{F}_1', -\vec{F}_1') = \vec{0},$$

або

$$\vec{ba} \times \vec{F}_2 + \vec{ba} \times \vec{F}_1' = \vec{0}.$$

Звідси випливає, що

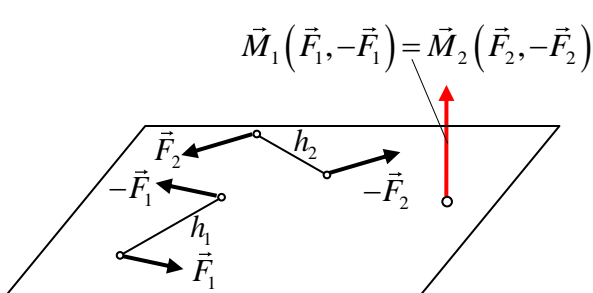
$$\vec{ba} \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_1') = \vec{0}.$$

Тоді матимемо

$$\{\vec{F}_2, \vec{F}_1'\} \sim \vec{0}, \quad \{-\vec{F}_2, -\vec{F}_1'\} \sim \vec{0}.$$

Отже пара сил $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}$ є зрівноважувальною для пари сил $\{\vec{F}_2, -\vec{F}_2\}$, що і треба було довести.

Теорема 3: якщо дві пари сил мають геометрично рівні моменти, тоді вони називаються статично еквівалентними (див. рис. 3.14).



$$M_1(\vec{F}_1, -\vec{F}_1) = F_1 h_1, \quad M_2(\vec{F}_2, -\vec{F}_2) = F_2 h_2.$$

Тоді

$$M_1 = M_2 \Rightarrow \vec{M}_1 = \vec{M}_2.$$

Рис. 3.14. Статично еквівалентні пари сил.

Теорема 4: якщо дві пари сил $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}$ і $\{\vec{F}_2, -\vec{F}_2\}$ знаходяться в перетинних площинах, тоді вони еквівалентні одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів цих пар (див. рис. 3.15).

Доведення

Використовуючи теорему 1, приводимо розглядувані пари до нових пар із загальним плечем AB , що лежить на лінії перетину обох площин. Тоді

$$\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\} \sim \{\vec{F}_1', -\vec{F}_1'\}, \quad \{\vec{F}_2, -\vec{F}_2\} \sim \{\vec{F}_2', -\vec{F}_2'\}.$$

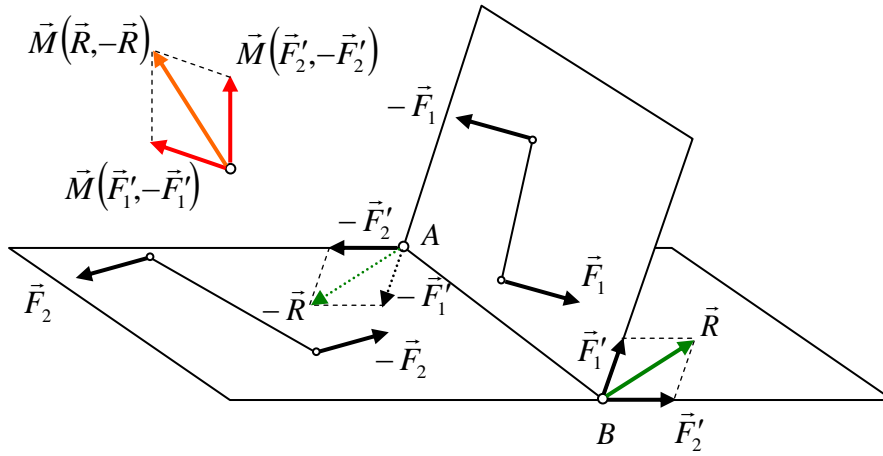


Рис. 3.15. Додавання пар сил, що лежать у перетинних площинах.

Далі помічаємо, що $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim \vec{R}$, $\{-\vec{F}_1, -\vec{F}_2\} \sim -\vec{R}$. Сили \vec{R} і $-\vec{R}$ утворюють пару. Визначимо її момент:

$$\begin{aligned}\vec{M}(\vec{R}, -\vec{R}) &= \vec{AB} \times \vec{R} = \vec{AB} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{AB} \times \vec{F}_1 + \vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{M}(\vec{F}_1, -\vec{F}_1) + \vec{M}(\vec{F}_2, -\vec{F}_2) = \\ &= \vec{M}(\vec{F}_1, -\vec{F}_1) + \vec{M}(\vec{F}_2, -\vec{F}_2),\end{aligned}$$

що і треба було довести.

Узагальнимо те, про що йшла мова вище.

Якщо розглядається система пар сил $\{\vec{F}_i, -\vec{F}_i\}_{i=1}^n$, тоді така система пар завжди зводиться до однієї пари, яка називається *вислідною парою*, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів розглядуваних пар:

$$\vec{M}(\vec{R}, -\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{F}_i, -\vec{F}_i). \quad (3.9)$$

Якщо всі пари $\{\vec{F}_i, -\vec{F}_i\}$ лежать в одній площині, тоді формула (3.9) перетворюється в алгебричний вираз

$$M(\vec{R}, -\vec{R}) = \sum_{i=1}^n M(\vec{F}_i, -\vec{F}_i). \quad (3.10)$$

Лекція 5

4. Довільна просторова система сил та умови її рівноваги

4.1. Лема про паралельний переніс сили

Не змінюючи статичного стану твердого тіла, силу, що прикладена до нього, можна перенести в будь-яку точку тіла паралельно до самої себе, прикладаючи при цьому *приєднану* пару сил (див. рис. 4.1).

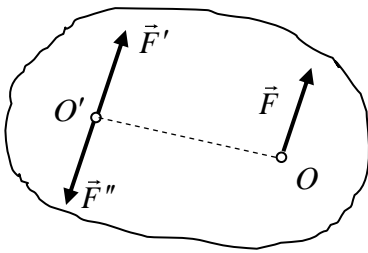


Рис. 4.1. До леми про паралельний переніс сили.

Д о в е д е н н я

Нехай сила \vec{F} прикладена в т. O , і її треба перенести в т. O' .

Додаючи в т. O' зрівноважену систему сил $\{\vec{F}', \vec{F}''\} \equiv \vec{0}$, тобто $F' = F'' = F$, отримаємо

еквівалентну початковій силі \vec{F} систему сил $\{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$, а саме $\{\vec{F}\} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}$. Остання система сил складається з сили $\vec{F}' = \vec{F}$ і приєднаної пари сил $\{\vec{F}, \vec{F}''\}$, що і треба було довести.

4.2. Головний вектор і головний момент довільної системи сил. Основна теорема статички твердого тіла (теорема Пуансо)

Нагадаємо, що основною задачею статички є визначення умов зведення довільної системи сил до найпростішого вигляду. Метод Пуансо дозволяє звести довільну систему сил до однієї пари сил і однієї сили.

Введемо спочатку поняття *головного вектора* і *головного моменту*.

Припустимо, що задається довільна система сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$.

Головним вектором даної системи сил є векторна сума всіх сил, що входять до системи.

Головним моментом даної системи сил відносно т. O (центра зведення) називається векторна сума моментів всіх сил, що входять в дану систему, відносно того ж центра O .

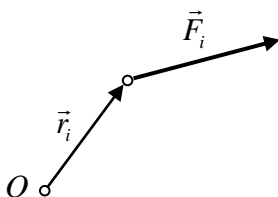


Рис. 4.2. До визначення

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (4.1)$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i), \quad (4.2)$$

де \vec{r}_i - радіус-вектор, проведений з центру зведення O у точку прикладення сили \vec{F}_i (див. рис. 4.2).

моменту сили \vec{F}_i .

Знайдемо проекції лівої і правої частин (4.1) і (4.2) на відповідні осі Ox, Oy і Oz

$$\begin{cases} F_{Ox} = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ F_{Oy} = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \\ F_{Oz} = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} M_{Ox} = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}). \end{cases} \quad (4.4)$$

Тут $F_{Ox}, F_{Oy}, F_{Oz}; M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$ - відповідні проекції головного вектора і головного моменту довільної системи сил на осі Ox, Oy і Oz .

Модулі і напрямки головного вектора і головного моменту знайдемо таким чином

$$\begin{cases} F_o = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2}, \\ \cos(\vec{F}_o; \vec{i}) = \frac{F_{Ox}}{F_o}, \\ \cos(\vec{F}_o; \vec{j}) = \frac{F_{Oy}}{F_o}, \\ \cos(\vec{F}_o; \vec{k}) = \frac{F_{Oz}}{F_o}; \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} M_o = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}, \\ \cos(\vec{M}_o; \vec{i}) = \frac{M_{Ox}}{M_o}, \\ \cos(\vec{M}_o; \vec{j}) = \frac{M_{Oy}}{M_o}, \\ \cos(\vec{M}_o; \vec{k}) = \frac{M_{Oz}}{M_o}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Скориставшись наведеною вище лемою, доведемо основну теорему статyki – теорему Пуансо.

Теорема Пуансо: довільна система сил, що діють на тверде тіло, замінюється еквівалентною системою, що складається з однієї сили, яка прикладена в довільній точці – центрі зведення і дорівнює головному вектору даної системи сил, і приєднаної пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центру зведення.

Д о в е д е н н я

Нехай маємо довільну систему сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$, прикладених до твердого тіла (див. рис. 4.3).

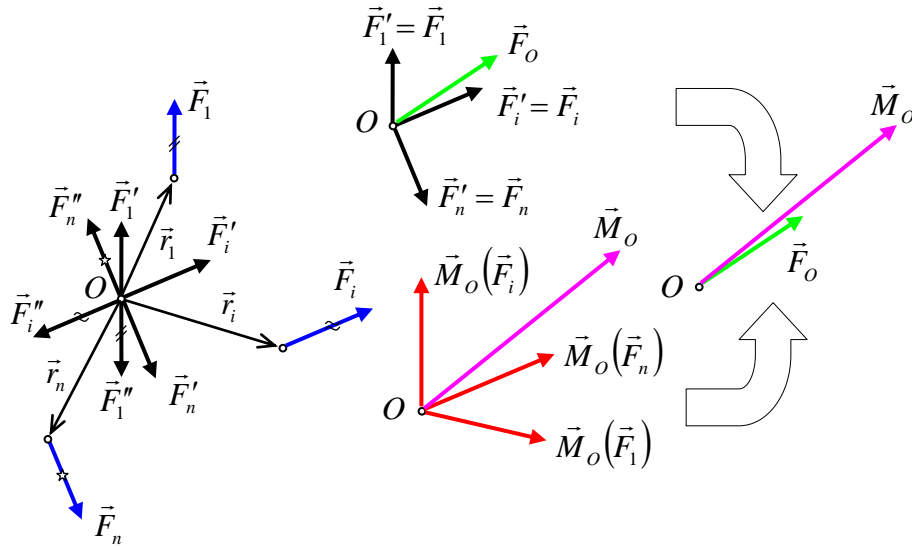


Рис. 4.3. Зведення довільної системи сил до найпростішого вигляду.

Для кожної сили \vec{F}_i ($i = \overline{1, n}$) в довільному центрі O прикладемо зрівноважену систему двох сил $\{\vec{F}_i', \vec{F}_i''\}$, таких, що $F_i' = F_i'' = F_i$, а $\vec{F}_i = \vec{F}_i' = -\vec{F}_i''$. Тоді сили \vec{F}_i і \vec{F}_i'' утворюють приєднану пару сил і маємо $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i', \vec{F}_i''\} \sim \{\vec{F}_i', \{\vec{F}_i, \vec{F}_i''\}\}$. Приєднану пару сил $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i''\}$ можна характеризувати її моментом $\vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i'')$, тому $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i', \vec{F}_i''\} \sim \{\vec{F}_i', \vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i'')\}$. Зауважимо також, що $\vec{M}(\vec{F}_i, \vec{F}_i'') = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O(\vec{F}_i)$, тому остаточно матимемо $\{\vec{F}_i, \vec{F}_i', \vec{F}_i''\} \sim \{\vec{F}_i', \vec{M}_O(\vec{F}_i)\}$, де силу \vec{F}_i' можна вважати перенесеною в центр O силою \vec{F}_i .

Таким чином, у точці O отримано сукупність перенесених в неї сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$ і сукупність моментів $\{\vec{M}_O(\vec{F}_i)\}_{i=1}^n$. Склавши відповідно ці вектори отримаємо головний вектор

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n \quad (4.7)$$

і головний момент

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) \quad (4.8)$$

вихідної довільної просторової системи сил.

Якщо дві системи сил мають геометрично рівні головні вектори і головні моменти, тоді такі системи називають *статично еквівалентними*.

4.3. Залежність головного вектора і головного моменту від вибору центра зведення

Нехай маємо довільну систему сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$, що прикладені до твердого тіла. Ця система сил зводиться до головного вектора

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (4.9)$$

і головного моменту

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i), \quad (4.10)$$

прикладених у центрі зведення O .

Тепер перенесемо центр зведення у т. O_1 (див. рис. 4.4). Головний вектор системи сил для нового центру за побудовою залишиться тим же самим, тобто *головний вектор не залежить від вибору центра зведення*.

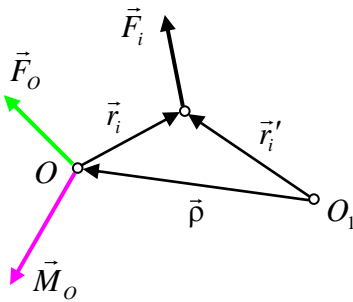


Рис. 4.4. Перехід до нового центру зведення.

Вираз (4.2) для головного моменту при з

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i),$$

або, якщо врахувати, що

$$\vec{r}_i' = \vec{O_1O} + \vec{r}_i = \vec{\rho} + \vec{r}_i,$$

отримаємо

$$\vec{M}_{O_1} = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{\rho} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

звідки маємо

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{\rho} \times \vec{F}_O.$$

Таким чином доведено, що *при зміні центру зведення головний момент системи сил змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора, прикладеного у старому центрі зведення, відносно нового центру зведення*.

4.4. Статичні інваріанти (незмінні)

Із наведеного вище випливає, що головний вектор довільної системи сил є інваріантним (незмінним) стосовно вибору центра зведення. Тому головний вектор називають *першим статичним інваріантом* (\vec{I}_1), тобто $\vec{I}_1 = \vec{F}_O$.

Помножимо скалярно ліву і праву частини формули (4.13) на головний вектор цієї системи:

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O + \vec{F}_O \cdot (\vec{\rho} \times \vec{F}_O),$$

звідки випливає, що

$$\vec{F}_O \cdot \vec{M}_{O_1} = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O,$$

оскільки $\vec{F}_O \cdot (\vec{\rho} \times \vec{F}_O) = 0$ через те, що $\vec{F}_O \perp \vec{\rho} \times \vec{F}_O$.

Таким чином, скалярний добуток головного вектора і головного моменту даної системи сил ($\vec{F}_O \cdot \vec{M}_O$) не залежить від вибору центра зведення і називається *другим статичним інваріантом* (I_2):

$$I_2 = \vec{F}_O \cdot \vec{M}_O. \quad (4.14)$$

Тут мова йде про те, що для будь-якої просторової системи сил величина I_2 є сталою. Також сталою і не залежною від вибору центра зведення буде проекція головного моменту на напрямок головного вектора

$$I'_2 = M_o \cos(\vec{F}_o \hat{;} \vec{M}_o),$$

що випливає з виразу (4.14), взявши до уваги, що модуль головного вектора є постійним для даної системи сил.

Зазначимо, що I'_2 називається *допоміжним другим статичним інваріантом*; він являє собою проекцію вектора головного моменту \vec{M}_o даної системи сил на напрямок її головного вектора \vec{F}_o (рис. 4.5).

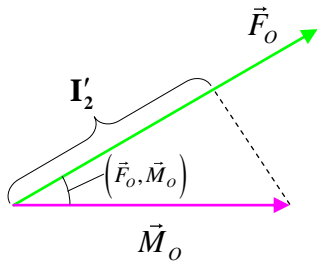


Рис. 4.5. Допоміжний другий статичний інваріант I'_2

Якщо головний вектор \vec{F}_o і головний момент \vec{M}_o є колінеарними векторами, то вони утворюють так званий *динамічний гвинт (динаму)*. Довільна просторова система сил зводиться до динамічного гвинта, якщо її другий статичний інваріант не дорівнює нулю (*довести самостійно*).

$$\vec{F}_O = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}, \quad) \quad (4.15)$$

а також

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}, \quad) \quad (4.16)$$

щр і треба було довести.

Умови (4.15) і (4.16) є умовами рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі. При проєціюванні виразів (4.15) і (4.16) на осі Ox , Oy , Oz , отримаємо відповідно

$$\begin{cases} F_{Ox} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \\ F_{Oy} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \\ F_{Oz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0; \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) = M_{Ox}(\vec{F}_1) + M_{Ox}(\vec{F}_2) + \dots + M_{Ox}(\vec{F}_n) = 0, \\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) = M_{Oy}(\vec{F}_1) + M_{Oy}(\vec{F}_2) + \dots + M_{Oy}(\vec{F}_n) = 0, \\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = M_{Oz}(\vec{F}_1) + M_{Oz}(\vec{F}_2) + \dots + M_{Oz}(\vec{F}_n) = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Умови (4.17) і (4.18) є умовами рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі: суми проєкцій всіх сил, щр входять у систему, на осі Ox , Oy , Oz дорівнюють нулю, і суми проєкцій моментів всіх сил відносно центру O на ті ж самі осі також дорівнюють нулю.

4.7. Умови рівноваги системи сил в частинних випадках

1) Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил

а) Із виразів (4.17) і (4.18) залишаються лише рівняння (див. рис. 4.7)

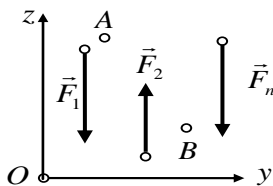


Рис. 4.7. Плоска система паралельних сил.

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

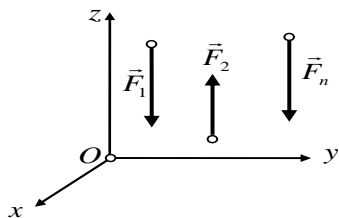
Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щрб алгебрична сума проєкцій всіх сил на вісь, паралельну їм, дорівнювала нулю, і алгебрична сума моментів всіх сил відносно довільної точки (центра) теж дорівнювала б нулю.

б) $\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0.$

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума моментів всіх сил відносно двох довільних точок площини, які не лежать на одній прямій, перпендикулярній до лінії дії сил, дорівнювала нулю.

2) Умови рівноваги просторової системи паралельних сил

Розглянемо просторову систему паралельних сил. Для неї перші два рівняння системи (4.17) і третє рівняння системи (4.18) – тотожні нулю. Залишаються, таким чином, лише рівняння (див. рис. 4.8)



$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Ox}(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Oy}(\vec{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума проєкцій всіх сил на вісь, що їм паралельна, дорівнювала нулю, а також дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно двох інших координатних осей.

Рис. 4.8. Просторова система паралельних сил.

3) Умови рівноваги довільної системи пар сил

Для рівноваги довільної системи пар сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювала нулю геометрична сума моментів всіх пар, тобто

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{F}_i, -\vec{F}_i) = \vec{0}.$$

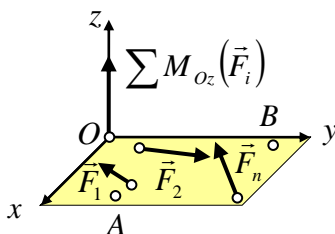
У разі розміщення всіх пар в одній площині умовою рівноваги є рівність нулю алгебричної суми моментів всіх пар відносно осі (наприклад, Ox), перпендикулярної до площини дії пар, тобто

$$\sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i, -\vec{F}_i) = 0.$$

4) Умови рівноваги довільної системи сил на площині

Для такої системи сил можна записати умови рівноваги у **трьох формах**.

а) З виразів (4.17) і (4.18) маємо (див. рис. 4.9):



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{Oz}(\vec{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми проєкцій всіх сил на координатні осі, що лежать у площині дії сил, а також алгебрична сума моментів тих же сил відносно довільної точки O площини.

Рис. 4.9. Довільна плоска система сил.

$$\text{б) } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно двох довільних точок площини, а також алгебрична сума проекцій всіх сил на координатну вісь x (або y).

$$\text{в) } \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

Для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми моментів всіх сил відносно трьох довільних точок площини, що не лежать на одній прямій.

Наведемо приклади застосування рівнянь рівноваги для деяких систем сил.

Задача 1 (збіжна просторова система сил)

Знайти зусилля в шарнірно закріплених стрижнях AB , BC і BD , якщо до шарніра B прикладена відома вертикальна сила \vec{P} (див. рис. 1). Кути α і β вважати відомими.

Дано: P , α , β .

Знайти: \vec{S}_1 , \vec{S}_2 і \vec{S}_3 .

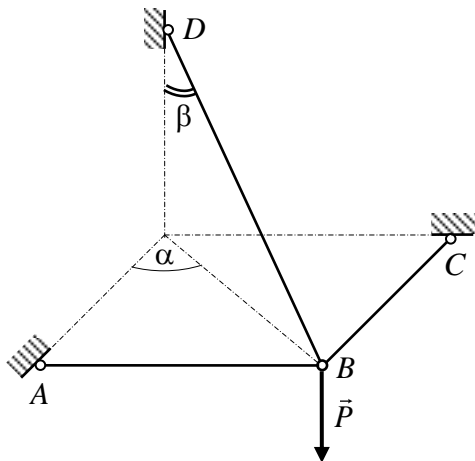


Рис. 1. Вихідна схема

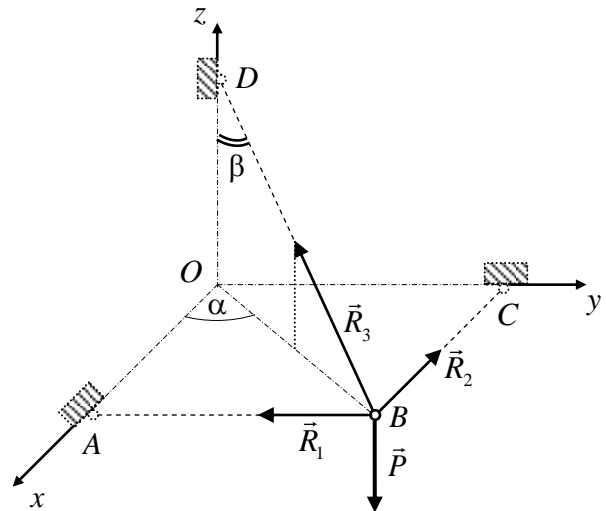


Рис. 2. Розрахункова схема

Розв'язання

Введемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ (рис. 2).

Розглянемо рівновагу вузла B . До нього прикладена активна сила \vec{P} , а в'язями є стрижні BA , BC і BD . Замінімо ці в'язі відповідними реакціями \vec{R}_1 , \vec{R}_2 і \vec{R}_3 , спрямованими вздовж відповідних стрижнів від шарніра B . В результаті отримуємо просторову збіжну систему сил, для якої складемо відповідні рівняння рівноваги:

$$\sum_i F_{ix} = -R_2 - R_3 \sin \beta \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = -R_1 - R_3 \sin \beta \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i F_{iz} = R_3 \cos \beta - P = 0,$$

звідки знайдемо

$$R_1 = -P \operatorname{tg} \beta \sin \alpha, \quad R_2 = -P \operatorname{tg} \beta \cos \alpha, \quad R_3 = P / \cos \beta.$$

Те, що величини R_1 і R_2 є від'ємними, означає, що сили \vec{R}_1 і \vec{R}_2 насправді спрямовані у протилежний бік по відношенню до зображених на рис. 2 напрямків.

Шукані зусилля \vec{S}_1 , \vec{S}_2 і \vec{S}_3 у стрижнях будуть дорівнювати за модулем відповідним реакціям \vec{R}_1 , \vec{R}_2 і \vec{R}_3 , а напрямлені у протилежний до них бік. Отже, стрижні BA і BC будуть стиснутими, а стрижень BD буде розтягуватися.

Остаточно отримаємо:

$$S_1 = P \operatorname{tg} \beta \sin \alpha, \quad S_2 = P \operatorname{tg} \beta \cos \alpha, \quad S_3 = P / \cos \beta.$$

Задача 2 (довільна плоска система сил)

До кінця балки AB довжиною 6 м, яка є консольно зачепленою у точці A , прикладений момент пари сил ($M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$), а до її середини C прикладена зосереджена сила ($P = 2 \text{ кН}$) під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту (див. рис. 1).

Дано: $M = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $P = 2 \text{ кН}$, $\ell = 6 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$.

Знайти: R_{Ax} , R_{Ay} , M_A .

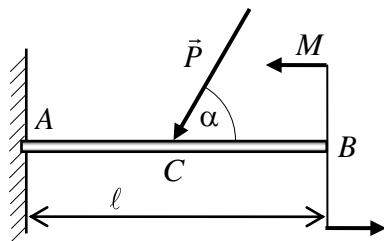


Рис. 1. Вихідна схема

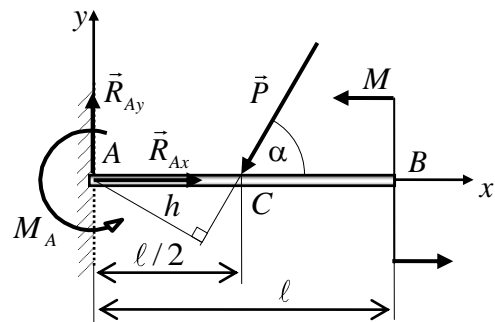


Рис. 2. Розрахункова схема

Розв'язання

Розглядаємо балку AB як об'єкт рівноваги. До неї прикладені активні сила \vec{P} і момент пари сил \vec{M} . В'яззю для балки є консольне зачеплення у точці A .

«Відкидаючи» в'язь, прикладаємо до балки відповідні реакції: \vec{R}_{Ax} , \vec{R}_{Ay} , \vec{M}_A (див. рис. 2). Для отриманої довільної плоскої системи сил, прикладених до балки AB , запишемо відповідні рівняння її рівноваги:

$$\sum_i F_{ix} = R_{Ax} - P \cos \alpha = 0,$$

$$\sum_i F_{iy} = R_{Ay} - P \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_i M_{Ai} = M_A - Ph + M = 0,$$

де $h = AC \sin \alpha = \frac{\ell}{2} \sin \alpha$.

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знайдемо

$$R_{Ax} = P \cos \alpha = 2 \text{ кН} \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ кН},$$

$$R_{Ay} = P \sin \alpha = 2 \text{ кН} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ кН} \approx 1,7 \text{ кН};$$

$$M_A = Ph - M = P \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ - M = 2 \text{ кН} \cdot 3 \text{ м} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \text{ кН} \cdot \text{м} = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Від'ємний знак моменту в закладанні (M_A) вказує на те, що насправді цей момент напрямлений у бік, протилежний до вказаного на рис. 2.

Отже, отримано остаточну відповідь: $R_{Ax} = 1 \text{ кН}$, $R_{Ay} \approx 1,7 \text{ кН}$, $M_A = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Лекція 7

4.8. Умови і рівняння рівноваги невільного твердого тіла

У випадку невільного твердого тіла, що знаходиться в рівновазі, необхідно, користуючись аксіомою про звільнення від в'язей, відкинути в'язі, замінюючи їх дію відповідними реакціями (які прикладені до точок контакту тіла із в'яззю), роблячи тим самим невільне тверде тіло вільним. Тепер рівновагу даного тіла будемо розглядати при дії на нього активних сил і реакцій в'язей.

Якщо кількість невідомих реакцій в'язей дорівнює, або менша за кількість рівнянь рівноваги, тоді задача про їх визначення називається *статично визначеною*; якщо ж число невідомих реакцій в'язей більше за число рівнянь, тоді така задача називається *статично невизначеною*.

Нехай на тверде тіло діють n - активних сил $\{\vec{F}_i\}_{i=1}^n$ і m - реакцій в'язей $\{\vec{R}_j\}_{j=1}^m$.

Тоді для рівноваги невільного твердого тіла необхідно і достатньо, щоб геометрична сума всіх активних сил і реакцій в'язей дорівнювала нулю, а також геометрична сума моментів всіх активних сил і реакцій в'язей відносно одного й того ж центра O дорівнювала нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{R}_j = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i) + \sum_{j=1}^m \vec{M}_O(\vec{R}_j) = \vec{0}. \quad (4.19)$$

Якщо спроектувати формули (4.19) на осі Ox , Oy і Oz , отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n F_{ix} + \sum_{j=1}^m R_{jx} = 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} + \sum_{j=1}^m R_{jy} = 0, \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} + \sum_{j=1}^m R_{jz} = 0; \end{array} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) + \sum_{j=1}^m M_x(\vec{R}_j) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) + \sum_{j=1}^m M_y(\vec{R}_j) = 0, \\ \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) + \sum_{j=1}^m M_z(\vec{R}_j) = 0. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

Якщо невідомі реакції в'язей не входять до деяких із співвідношень (4.20), (4.21), тоді ці співвідношення називаються *умовами рівноваги* невільного твердого тіла. Якщо ж у деякі співвідношення входять невідомі реакції в'язей, тоді вони називаються *рівняннями рівноваги* невільного твердого тіла.

1) Умови рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою

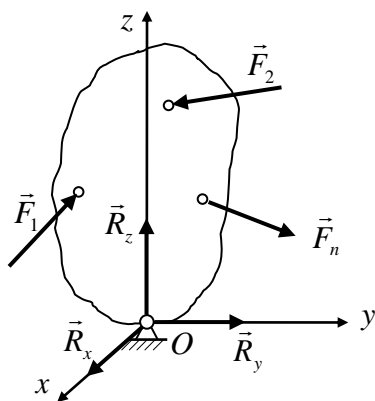


Рис. 4.10. Невільне тверде тіло під дією довільної просторової системи сил.

Введемо систему координат, сумістивши її початок з нерухомою точкою O (рис. 4.10). Тоді, подаючи реакцію в нерухомій точці O сумою трьох складових по осям координат, тобто у вигляді

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z,$$

отримаємо наступні шість рівнянь:

$$\sum F_{ix} + R_x = 0, \quad \sum M_x(\vec{F}_i) = 0,$$

$$\sum F_{iy} + R_y = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

$$\sum F_{iz} + R_z = 0;$$

Останні три співвідношення не містять реакцій в'язей, отже вони є умовами рівноваги.

Таким чином, умовами рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою є наступні: алгебричні суми моментів активних сил відносно осей Ox , Oy і Oz (з початком в нерухомій точці) повинні дорівнювати нулю.

2) Умови рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками

Вісь, що проходить через дві нерухомі точки O_1 і O_2 , називається *нерухомою*.

Введемо систему координат з початком в одній з нерухомих точок (наприклад, O_1), а вісь Oz проведемо через іншу нерухому точку O_2 (рис. 4.11). Тоді, подаючи реакції в цих точках у вигляді

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_{1x} + \vec{R}_{1y} + \vec{R}_{1z}, \quad \vec{R}_2 = \vec{R}_{2x} + \vec{R}_{2y} + \vec{R}_{2z},$$

отримаємо наступні шість рівнянь:

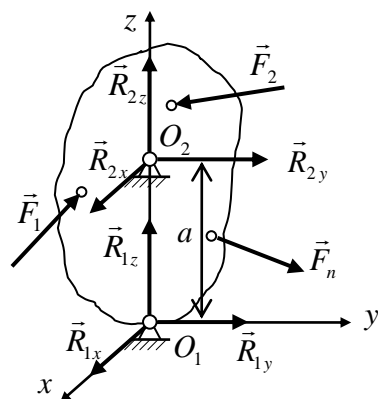


Рис. 4.11. Невільне тверде тіло з двома нерухомими точками.

$$\sum F_{ix} + R_{1x} + R_{2x} = 0,$$

$$\sum F_{iy} + R_{1y} + R_{2y} = 0,$$

$$\sum F_{iz} + R_{1z} + R_{2z} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_i) - R_{2y}a = 0,$$

$$\sum M_y(\vec{F}_i) + R_{2x}a = 0,$$

$$\sum M_z(\vec{F}_i) = 0.$$

Останнє співвідношення є умовою рівноваги, оскільки воно не містить реакцій в'язей.

Для рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками необхідно, щоб алгебрична сума моментів активних сил відносно осі, що проходить через ці дві точки, дорівнювала нулю.

4.9. Теорема про момент рівнодійної довільної системи сил

Теорема: якщо довільна просторова система сил зводиться до рівнодійної, тоді момент рівнодійної відносно центра O_1 дорівнюватиме сумі моментів всіх сил відносно того ж центра.

Д о в е д е н н я

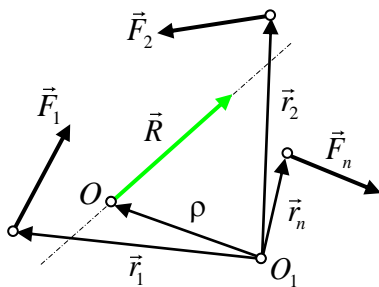


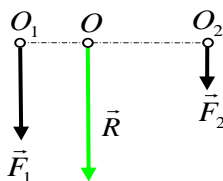
Рис. 4.12. До визначення моменту рівнодійної довільної системи сил.

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_{O_1}(\vec{R}) = \vec{\rho} \times \vec{R} = \vec{\rho} \times \left(\sum \vec{F}_i \right) = \sum \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_i).$$

Отже теорема доведена.

Застосуємо теорему Варіньйона до системи двох паралельних сил (одного і протилежних напрямків), які не утворюють пару (див. рис. 4.13, 4.14). Виберемо точку O на лінії дії рівнодійної цих сил, тоді:

а)



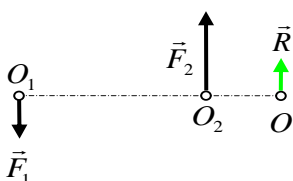
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R = F_1 + F_2;$$

$$M_O(\vec{R}) = 0: F_1 \cdot OO_1 - F_2 \cdot OO_2 = 0,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OO_2}{OO_1}.$$

Рис. 4.13. Паралельні сили одного напрямку.

б)



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R = F_2 - F_1;$$

$$M_O(\vec{R}) = 0: F_1 \cdot OO_1 - F_2 \cdot OO_2 = 0,$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{OO_2}{OO_1}.$$

Рис. 4.14. Паралельні сили протилежних напрямків.

Система двох паралельних сил, які не утворюють пару, має рівнодійну, яка паралельна цим силам, а її модуль дорівнює сумі модулів сил, якщо сили напрямлені в один бік, і різниці модулів у разі протилежного напрямку сил.

Лінія дії рівнодійної ділить відрізок O_1O_2 на частини, обернено пропорційні модулям сил, внутрішнім чином для сил одного напрямку, і зовнішнім - для сил протилежних напрямків.

Лекція 8

4.10. Тертя ковзання. Тертя кочення

Існують декілька видів тертя. Серед них є:

- *тертя ковзання*, яке виникає в результаті поступального руху одного тіла відносно іншого;
- *тертя кочення*, яке виникає при коченні одного тіла по іншому, наприклад, при коченні колеса по рейці;
- *тертя вертіння* (виникає в підп'ятнику).

Розглянемо перші два види тертя більш детально.

1) Тертя ковзання

Розглянемо прилад, за допомогою якого вивчають явище тертя ковзання (так званий *трибометр*), схема якого показана на рис. 4.15.

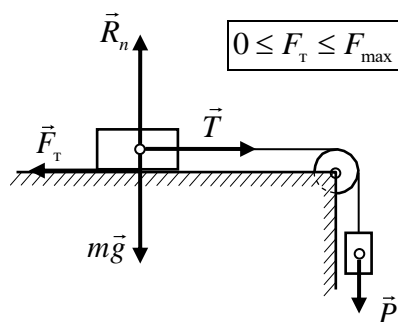


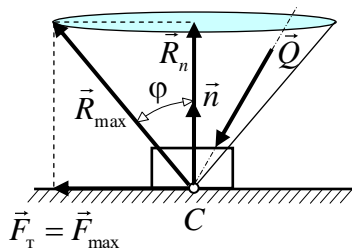
Рис. 4.15. Схема трибометра.

Збільшення ваги P тягаря призводить до збільшення F_t , яка зрештою досягає значення F_{\max} , при якому тіло починає рухатись. Це відповідає стану *граничної рівноваги*.

Дослідним шляхом доведено, що при взаємному русі тіл сили тертя менші за сили тертя при їх взаємному спокої.

Дослідами встановлено, що $F_t = \mu R_n$ (закон *Кулона*), де коефіцієнт пропорційності μ (коефіцієнт тертя ковзання) визначається експериментальним шляхом.

Максимальне значення повної реакції в'язі \vec{R}_{\max} буде у випадку, коли $F_t = F_{\max}$.



Через \vec{R}_{\max} проводимо пряму, потім обертаємо її навколо орта \vec{n} . В результаті отримуємо поверхню конуса, який називається *конусом тертя* (рис. 4.16). Область, що знаходиться всередині конуса тертя, називається *областю тертя*.

Рис. 4.16. Конус тертя.

Вона має таку **властивість**: для того щоб тіло, що знаходиться на шорсткій поверхні, було в стані рівноваги, необхідно, щоб лінія дії активної сили \vec{Q} , що діє на тіло, проходила через т. C і знаходилася в області тертя.

2) Тертя кочення

Явище тертя кочення виникає, наприклад, при русі котка без проковзування по шорсткій поверхні.

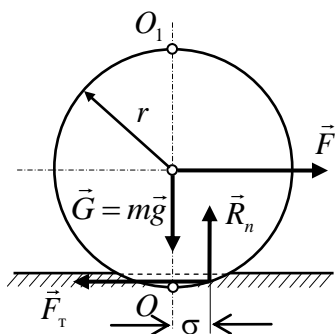


Рис. 4.17. До визначення моменту тертя кочення на веденому котку.

Нехай коток радіуса r знаходиться в рівновазі під дією прикладеної сили \vec{F} та ваги $m\vec{g}$ (див. рис. 4.17).

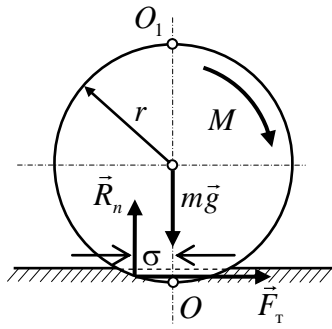
В результаті деформації котка і опорної поверхні нормальна реакція в'язі буде зміщена на відстань σ по відношенню до OO_1 .

Оскільки коток знаходиться в рівновазі під дією пар сил $\{\vec{F}, \vec{F}_T\}$, $\{\vec{R}_n, \vec{G}\}$, то вони є зрівноважуючими одна одну і сума моментів цих пар дорівнює нулю. При цьому момент пари $\{\vec{R}_n, \vec{G}\}$ називається *моментом тертя кочення*.

Знайдемо модулі моментів вказаних пар сил:

$$M(\vec{F}, \vec{F}_T) = Fr, \quad M(\vec{R}_n, \vec{G}) = mg\sigma.$$

Із рівності моментів випливає, що $Fr = mg\sigma$, звідки знаходимо $\sigma = \frac{Fr}{mg}$ - плече пари $\{\vec{R}_n, \vec{G}\}$ або коефіцієнт тертя кочення. Зауважимо, що коефіцієнт тертя кочення σ має розмірність довжини на відміну від коефіцієнту тертя ковзання μ , який є безрозмірною величиною.



Розглянемо коток у випадку прикладення до нього моменту M (рис. 4.18). Тоді \vec{R}_n буде зміщена на відстань σ так, як показано на рисунку. Модуль моменту тертя кочення і в цьому разі визначається формулою $M(\vec{R}_n, \vec{G}) = mg\sigma$.

Рис. 4.18. До визначення моменту тертя кочення на ведучому котку.

4.11. Приклади розв'язання задач статки (система двох тіл)

Задача 1 (складена балка)

Два стрижня AB і BC з'єднані шарніром B (проміжний шарнір). Визначити реакції в закладанні A , якщо відомі \vec{F}_1 , \vec{F}_2 і α . Геометричні розміри наведені на рис. 1.

Дано: \vec{F}_1 ,
 \vec{F}_2 ; a, b, c, d ; α .

Знайти:
 R_{Ax}, R_{Ay}, M_A .

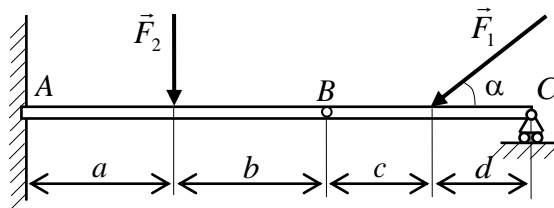


Рис. 1. Вихідна схема.

Розв'язання

За методом перерізів розінемо складену балку на дві частини по проміжному шарніру B і запишемо аналітичні умови рівноваги для кожної частини окремо. Спочатку розглянемо праву частину BC , для якої ліва частина AB є в'яззю. В'язь відкидаємо, замінюючи її дію відповідною реакцією (поданою двома складовими).

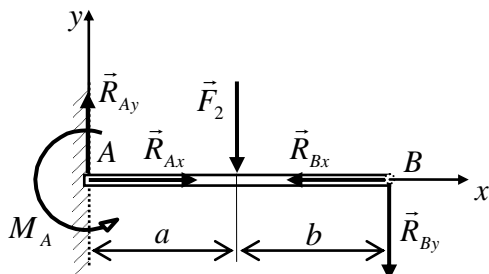


Рис. 2. Ліва частина балки.

$$2) \begin{cases} \sum F_{ix} = R_{Ax} - R_{Bx} = 0, \\ \sum F_{iy} = R_{Ay} - R_{By} - F_2 = 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_i) = M_A - R_{By}(a+b) - F_2a = 0. \end{cases}$$

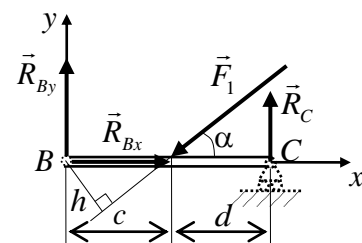


Рис. 3. Права частина балки.

1)

З цієї системи рівнянь, враховуючи 1), матимемо

$$R_{Ax} = R_{Bx} = F_1 \cos \alpha,$$

$$R_{Ay} = F_2 + R_{By} = F_2 + \frac{F_1 d}{c+d} \sin \alpha,$$

$$M_A = F_2 a + R_{By} (a+b) = F_2 a + \frac{F_1 d (a+b)}{c+d} \sin \alpha$$

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = -F_1 \cos \alpha + R_{Bx} = 0, \\ \sum F_{iy} = R_C - F_1 \sin \alpha + R_{By} = 0, \\ \sum M_B (\vec{F}_i) = R_C (c+d) - F_1 h = 0. \end{cases}$$

Звідси, беручи до уваги, що $h = c \sin \alpha$, отримаємо

$$\begin{aligned} R_{Bx} &= F_1 \cos \alpha, \\ R_C &= \frac{F_1 h}{c+d} = \frac{F_1 c}{c+d} \sin \alpha, \end{aligned}$$

тоді

$$R_{By} = F_1 \sin \alpha - R_C = \frac{F_1 d}{c+d} \sin \alpha.$$

Таким чином, знайдені всі шукані величини.

Зауважимо, що проміжний шарнір знижує невизначеність задачі на одиницю. В подібних задачах завжди застосовуємо метод перерізів, тобто розтинаємо балку по проміжному шарніру.

Задача 2

Стрижень AB вагою P спирається на балку CD . Визначити опорні реакції в точках A , C і D , якщо відомо, що $CB = BD$, і кут α (див. рис. 1).

Дано: P , α ,
 $CB = BD$.

Знайти:

R_{Ax} , R_{Ay} , R_D ,
 R_{Cx} , R_{Cy} .

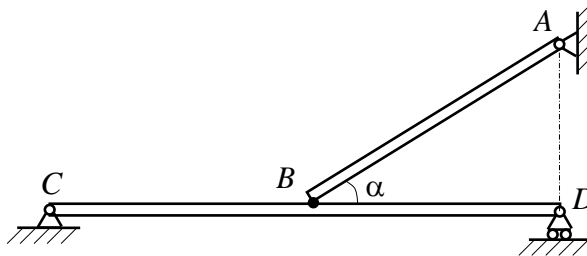


Рис. 1. Вихідна схема.

Розв'язання

Розглянемо спочатку рівновагу стрижня AB (див. рис. 2), вважаючи відкинуту балку CD в'яззю.

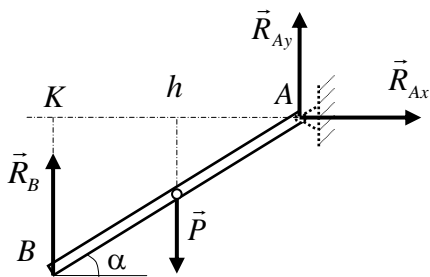


Рис. 2. Сили, прикладені до стрижня AB .

$$1) \begin{cases} \sum F_{ix} = R_{Ax} = 0, \\ \sum F_{iy} = R_{Ay} + R_B - P = 0, \\ \sum M_A (\vec{F}_i) = -R_B h + P \frac{h}{2} = 0. \end{cases}$$

З цих рівнянь отримаємо

$$R_{Ax} = 0, R_B = P/2, R_{Ay} = P - R_B = P/2.$$

Розглянемо тепер рівновагу балки CD , для якої тиск \vec{R}_B з боку стрижня AB буде активною силою (див. рис. 3).

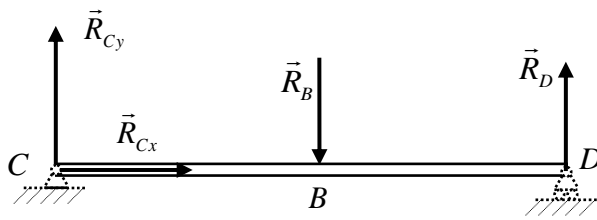


Рис. 3. До рівноваги балки CD .

$$R_{Cx} = 0, \quad R_D = \frac{BC}{2BC} R_B = \frac{R_B}{2} = \frac{P}{4}, \quad R_{Cy} = R_B - R_D = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}.$$

Таким чином знайдені всі шукані величини.

$$2) \begin{cases} \sum F_{ix} = R_{Cx} = 0, \\ \sum F_{iy} = R_{Cy} - R_B + R_D, \\ \sum M_C(\vec{F}_i) = R_D \cdot 2BC - R_B \cdot BC \end{cases}$$

звідки матимемо

Лекція 9

Розділ 3. Кінематика

Тема 3.1. Вступ

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, без урахування їхніх мас і причин, що викликали їх рух.

Рух твердого тіла розглядається у просторі і в часі.

За Ньютоном *простір* є неперервним, однорідним і ізотропним, тобто абсолютним. Властивість ізотропії полягає в тому, що властивості простору в усіх його точках, а в кожній точці – в усіх напрямках, однакові.

За Ньютоном вводиться і абсолютний *час*, який є неперервним і однорідним. Час, що спливає між двома явищами, називається *проміжком часу*. Момент часу, з якого починається відлік часу, називається *початковим*.

В теоретичній механіці положення тіла у просторі визначається відносно іншого довільно вибраного незмінного тіла, яке називається *тілом відліку*.

Сукупність тіла відліку, зв'язаної з ним системи координат, та годинника утворює *систему відліку*.

В класичній механіці постулюється наявність системи відліку, по відношенню до якої простір і час є абсолютними. У такій системі відліку ізолювана матеріальна точка може знаходитися у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху як завгодно довго.

В такому разі система відліку називається *інерціальною*.

Системи відліку, які не мають вказану властивість, називаються *неінерціальними*.

Рух тіла по відношенню до вибраної системи відліку вважається відомим, якщо можна визначити його положення в розглядуваній системі в довільний момент часу.

Встановлення способів, за допомогою яких може бути заданий рух тіла по відношенню до вибраної системи відліку – є однією із задач кінематики.

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб за рівняннями, які визначають закон руху даного тіла, визначити всі кінематичні характеристики цього руху (траєкторії будь-яких точок тіла, їх швидкості та прискорення). Очевидно, що рух твердого тіла по відношенню до вибраної системи відліку буде відомим, якщо є відомим рух кожної точки цього тіла, тому кінематику поділимо на:

- **кінематику точки,**
- **кінематику твердого тіла.**

Тема 3.2. Кінематика точки

5. Кінематика точки в нерухомій системі координат

5.1. Способи задання руху точки

Рух точки будемо розглядати в нерухомій системі координат.

Переміщення матеріальної точки являє собою її перехід із одного положення у просторі в інше довільним чином, тобто переміщення характеризується початковим і кінцевим положенням точки, а також відповідним проміжком часу (Δt).

Під *рухом* матеріальної точки розуміють її перехід із одного положення у просторі в інше (із початкового в кінцеве) визначеним чином, у визначеній залежності від часу.

Залежність між положенням точки, що рухається у просторі, і часом визначає *закон* її руху.

Основною задачею кінематики точки є встановлення способів задання руху точки по відношенню до вибраної системи відліку і, виходячи з них, встановлення методів визначення кінематичних характеристик (траєкторії, швидкості і прискорення).

Розглянемо способи опису руху точки M у просторі.

а) Векторний спосіб

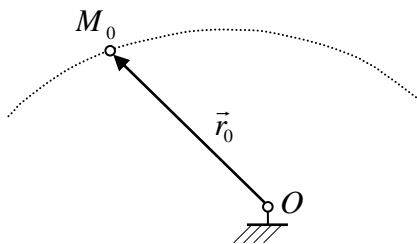


Рис. 5.1. До векторного способу.

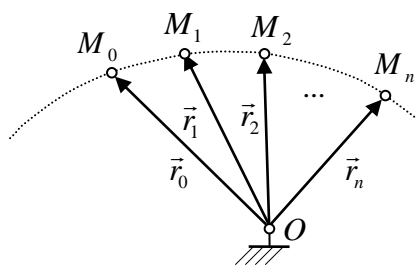


Рис. 5.2. Зміна радіус-вектора \vec{r} з часом.

Таким чином маємо

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (5.1)$$

- кінематичне рівняння руху точки у векторній формі.

Функція $\vec{r}(t)$ повинна бути однозначною, неперервною і щнайменше двічі диференційовною.

Геометричне місце кінців радіус-вектора точки, що рухається, називається її *траєкторією*. Оскільки рух точки неперервний, то траєкторією є неперервна крива, до якої у кожній її точці можна провести одну дотичну.

Вибираємо у просторі нерухому точку O і проводимо з неї радіус-вектор \vec{r}_0 в розглядувану точку M в її початковому положенні M_0 (рис. 5.1).

Під час руху цієї точки її радіус-вектор змінюється за величиною і напрямком, визначаючи однозначно положення точки у просторі і часі (рис. 5.2):

$$t_0 \rightarrow \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

$$t_1 \rightarrow \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1,$$

$$t_2 \rightarrow \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2,$$

...

$$t_n \rightarrow \vec{r}(t_n) = \vec{r}_n.$$

б) Координатний спосіб

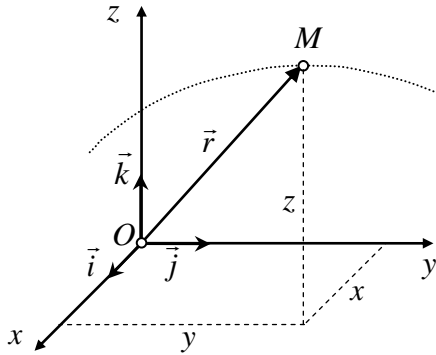


Рис. 5.3. До координатного способу.

Оскільки радіус-вектор \vec{r} , що однозначно визначає положення точки M і має проекції $\{x, y, z\}$, є функцією часу (рис. 5.3), тоді й ці проекції мають бути функціями часу, тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (5.2)$$

З іншого боку x, y і z є координатами т. M ,

тому ці залежності є кінематичними рівняннями руху точки у координатній формі.

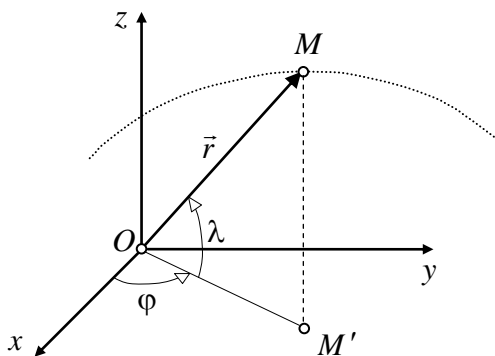
Зв'язок між векторним і координатним способами визначається формулою

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (5.3)$$

Функції (5.2) повинні бути однозначними, неперервними і двічі диференційовними.

Рух точки можна розглядати в довільній системі координат: сферичній, полярній, циліндричній, і т.п.

Розглянемо рух точки у сферичній системі координат. Її сферичними координатами будуть: полярний радіус $r = OM$, і кути φ і λ .



Тоді декартові координати точки можна виразити через її сферичні координати (див. рис. 5.4) так

$$\begin{cases} x = r \cos \lambda \cos \varphi, \\ y = r \cos \lambda \sin \varphi, \\ z = r \sin \lambda. \end{cases} \quad (5.4)$$

Рівняння (5.4) характеризують зв'язок векторного і координатного способів у разі використання сферичної системи координат.

Рис. 5.4. Сферичні координати.

Розглянемо полярну систему координат у разі руху точки M у площині Oxy (полярними координатами точки будуть: радіус $r = OM$ і кут φ).

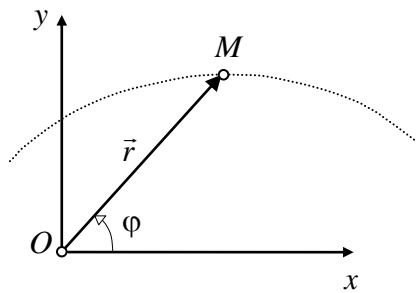


Рис. 5.5. Плоска полярна система координат.

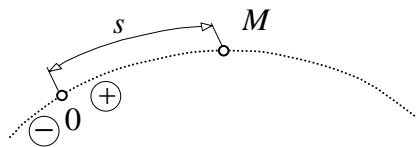
Тоді декартові координати точки можна виразити через її полярні координати (див. рис. 5.5) так

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (5.5)$$

в) Натуральний спосіб

Цей спосіб доречно використовувати, якщо відома траєкторія точки.

При цьому способі необхідно задати чотири елементи (див. рис. 5.6):



- траєкторію,
- початок відліку (нуль),
- додатний напрямок відліку,
- дугову координату (дугу s).

Рис. 5.6. До натурального способу.

При русі точки дугова координата змінюється з часом, тобто

$$s = s(t). \quad (5.6)$$

Вираз (5.6) є кінематичним рівнянням руху точки у натуральній формі.

5.2. Поняття про годограф векторної функції. Похідна від векторної функції, яка задана у нерухомій системі координат, за скалярним аргументом

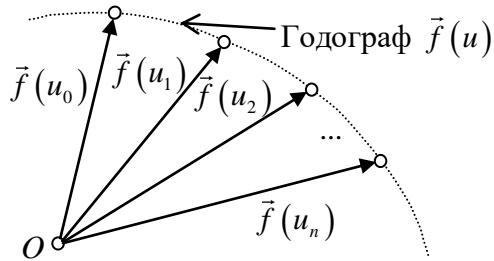


Рис. 5.7. Годограф векторної функції.

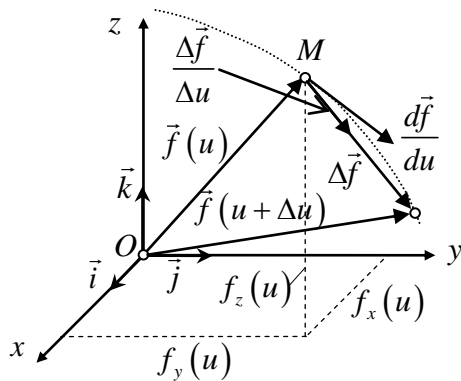


Рис. 5.8. Похідна від векторної функції.

Розглянемо векторну функцію \vec{f} скалярного аргументу u . При зміні аргумента u векторна функція $\vec{f}(u)$ змінюється за величиною і напрямком (рис. 5.7).

Крива, що окреслиться кінцем вектора $\vec{f}(u)$ при неперервній зміні аргумента u , якщо початок вектора $\vec{f}(u)$ зафіксований в точці O , називається *годографом векторної функції $\vec{f}(u)$* .

Якщо дати приріст Δu аргументу, тоді отримаємо відповідний приріст функції $\vec{f}(u)$:

$$\Delta \vec{f} = \vec{f}(u + \Delta u) - \vec{f}(u).$$

Далі знаходимо при $\Delta u \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta u} = \frac{d\vec{f}}{du}.$$

Похідна від векторної функції $\vec{f}(u)$ за скалярним аргументом u являє собою вектор $\frac{d\vec{f}}{du}$, напрямлений по дотичній до годографа функції $\vec{f}(u)$ в точці M в бік, що відповідає зростанню аргументу (рис. 5.8). Цей вектор $\left(\frac{d\vec{f}}{du}\right)$ характеризує швидкість зміни вектора $\vec{f}(u)$ за модулем і напрямком при зміні u .

Залежності

$$x = f_x(u), \quad y = f_y(u), \quad z = f_z(u)$$

- є рівняннями годографа векторної функції $\vec{f}(u)$.

Величини $f_x(u)$, $f_y(u)$ і $f_z(u)$ є одночасно і координатами точки M .

Запишемо вираз вектора $\vec{f}(u)$ через його проекції на осі системи координат:

$$\vec{f}(u) = f_x(u) \vec{i} + f_y(u) \vec{j} + f_z(u) \vec{k}. \quad (5.7)$$

Тоді

$$\frac{d\vec{f}}{du} = \frac{d}{du} \left[f_x(u) \vec{i} + f_y(u) \vec{j} + f_z(u) \vec{k} \right] = \frac{df_x(u)}{du} \vec{i} + \frac{df_y(u)}{du} \vec{j} + \frac{df_z(u)}{du} \vec{k} \quad (5.8)$$

,

де орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ є векторними константами.

Похідною від вектора за скалярним аргументом є вектор, проекції якого на нерухомі осі дорівнюють похідним за тим же аргументом від проекцій диференційовного вектора на ті ж самі осі.

Лекція 10

5.3. Швидкість руху точки

а) Швидкість точки при векторному і координатному способах задання її руху

Швидкістю точки називається кінематична міра руху точки, що дорівнює першій похідній за часом від радіус-вектора цієї точки в розглядуваній системі відліку.

Якщо

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (5.9)$$

тоді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (5.10)$$

або в координатній формі

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де x, y, z - проекції вектора \vec{r} на осі системи координат $Oxyz$. В цьому разі матимемо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Якщо ввести позначення

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

де крапка над літерою означає диференціювання за часом, тоді вектор швидкості \vec{v} можна записати у вигляді

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (5.11)$$

Тут $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ - проекції вектора швидкості на осі системи координат $Oxyz$.

Величину вектора швидкості визначимо за наступною формулою:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (5.12)$$

а напрямок визначиться відповідними напрямними косинусами

$$\cos(\vec{v}; Ox) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\vec{v}; Oy) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\vec{v}; Oz) = \frac{v_z}{v}. \quad (5.13)$$

Формула (5.10) дає можливість визначити швидкість точки при векторному способі задання її руху. Формули (5.11), (5.12) і (5.13) є формулами для визначення вектору швидкості точки за величиною і напрямком у просторі при координатному способі задання її руху.

Проекції вектора швидкості на осі Ox , Oy , Oz є першими похідними за часом від відповідних координат (x, y, z) .

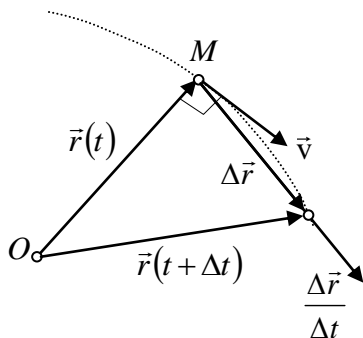


Рис. 5.9. Вектор швидкості.

Виходячи з поняття похідної векторної функції робимо висновок, що вектор швидкості визначає швидкість зміни просторового положення точки з плином часу і напрямлений вздовж дотичної до годографа вектора \vec{r} з плином часу t , тобто по дотичній до траєкторії точки в бік її руху (рис. 5.9).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}.$$

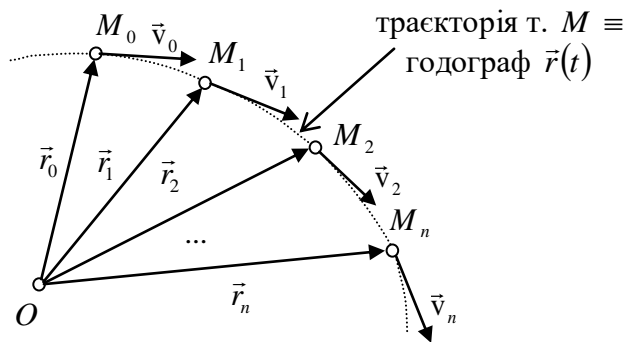


Рис. 5.10. Зміна вектора швидкості з часом.

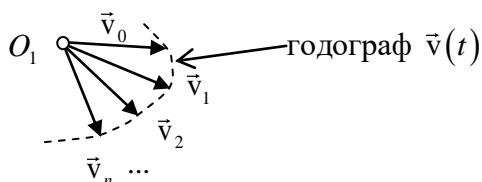


Рис. 5.11. Побудова годографа вектора швидкості.

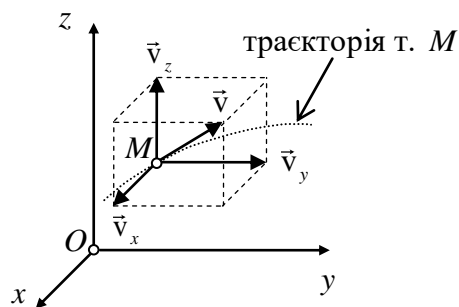


Рис. 5.12. Розкладання вектора швидкості на складові.

Вектор $\vec{r}(t)$ змінюється з часом (рис. 5.10):

$$t_0 \rightarrow \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

$$t_1 \rightarrow \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1,$$

$$t_2 \rightarrow \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2,$$

...

$$t_n \rightarrow \vec{r}(t_n) = \vec{r}_n.$$

Перенесемо в довільну нерухому точку O_1 паралельно до самих себе вектори швидкостей $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ точки M , з'єднаємо їх кінці, отримуючи таким чином годограф вектора швидкості (рис. 5.11).

При координатному способі задання руху т. M вектор її швидкості може бути розкладеним на складові по осях як показано на рис. 5.12.

б) Натуральні осі і формули Френе

Розглянемо на траєкторії руху точки два суміжних її положення: M і M_1 .

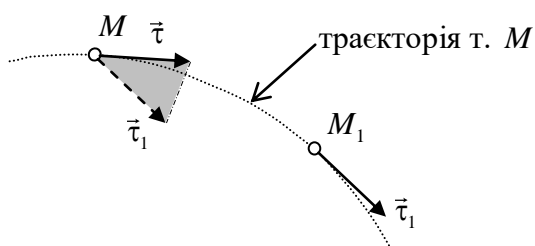


Рис. 5.13. Стична площина.

В точках M і M_1 проводимо дотичні до траєкторії з ортами $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$. Потім переносимо уявно орт $\vec{\tau}_1$ в т. M і проводимо площину через $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$ (див. рис. 5.13.).

Граничне положення вказаної площини при наближенні т. M_1 до т. M утворює *стичну площину*, що містить дотичну з ортом $\vec{\tau}$.

Проведемо площину, перпендикулярну до орта $\vec{\tau}$ в т. M , яку назовемо *нормальною площиною*. Лінія перетину стичної площини з нормальною визначає *головну нормаль* (з ортом \vec{n}). Потім проведемо площину перпендикулярно до \vec{n} в т. M , яку назовемо *спрямною площиною*. Лінія перетину спрямної і нормальної площин утворює *бінормаль* траєкторії (з ортом \vec{b}). Очевидно, що $\vec{b} \perp \vec{\tau}$ і $\vec{b} \perp \vec{n}$ (див. рис. 5.14).

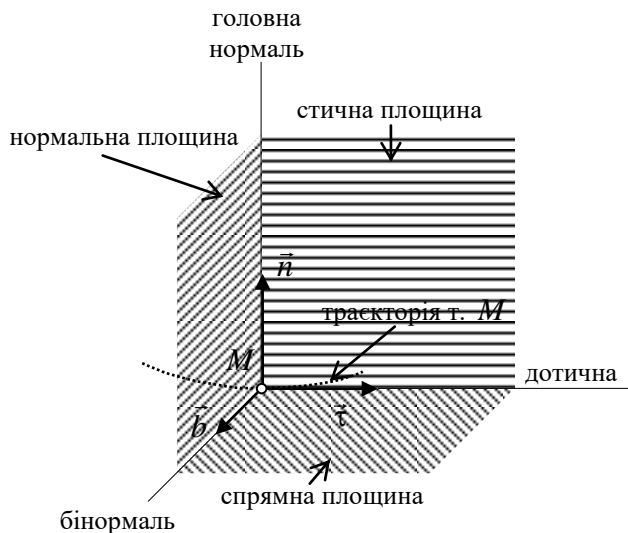


Рис. 5.14. Натуральні осі та натуральний тригранник.

Для визначення ортів $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} використовуються наступні формули Френе:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \vec{n} = \rho \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \quad (\rho - \text{радіус кривини траєкторії}), \quad \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}.$$

в) Визначення швидкості точки при натуральному способі задання її руху

Нехай відома дугова координата $s = s(t)$ точки, тоді її радіус-вектор буде складною функцією часу, а саме: $\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$. Оскільки швидкість визначається формулою $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, тому матимемо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (5.14)$$

Беручи до уваги першу формулу Френе, перший множник у формулі (5.14) можна замінити на $\vec{\tau}$, тому отримаємо

$$\vec{v} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt}. \quad (5.15)$$

Помножимо цю формулу скалярно на $\vec{\tau}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{\tau} = \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} \frac{ds}{dt}.$$

В цьому виразі зліва маємо проекцію вектора \vec{v} на напрямок дотичної (тобто v_τ), а справа $\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1$, тому отримаємо $v_\tau = \frac{ds}{dt}$, тоді формула (5.15) набуде вигляду

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} \quad (5.16)$$

- формула для визначення швидкості точки при натуральному способі задання руху.

Таким чином, швидкість точки при натуральному способі задання її руху дорівнює добутку проекції швидкості на напрямок дотичної (v_τ) і орта $\vec{\tau}$.

Таким чином, в кожній точці траєкторії можна вказати сукупність трьох взаємно перпендикулярних напрямків, що приймаються за координатні осі:

- дотичної, що характеризується ортом $\vec{\tau}$, напрямленої в бік зростання дугової координати;
- головної нормалі, напрямленої в бік угнутості кривої, з ортом \vec{n} ;
- бінормалі (з ортом \vec{b}), яка перпендикулярна одночасно до дотичної і головної нормалі, тобто $\vec{b} \perp \vec{\tau}$ і $\vec{b} \perp \vec{n}$.

При цьому стична, нормальна та спрямна площини утворюють так званий натуральний тригранник.

Лекція 11

5.4. Прискорення руху точки

Другою основною кінематичною характеристикою руху точки є її прискорення.

Прискорення точки є кінематичною мірою швидкості зміни вектора швидкості точки і дорівнює першій похідній за часом від швидкості точки у розглядуваній системі відліку, тобто

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (5.17)$$

Розглянемо визначення прискорення точки при різних способах задання її руху.

а) Векторний спосіб задання руху точки

В цьому разі за відомим радіус-вектором точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$ і швидкістю точки, що визначається за формулою $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, можна знайти шукане прискорення:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (5.18)$$

- вираз для визначення прискорення точки при векторному способі задання її руху.

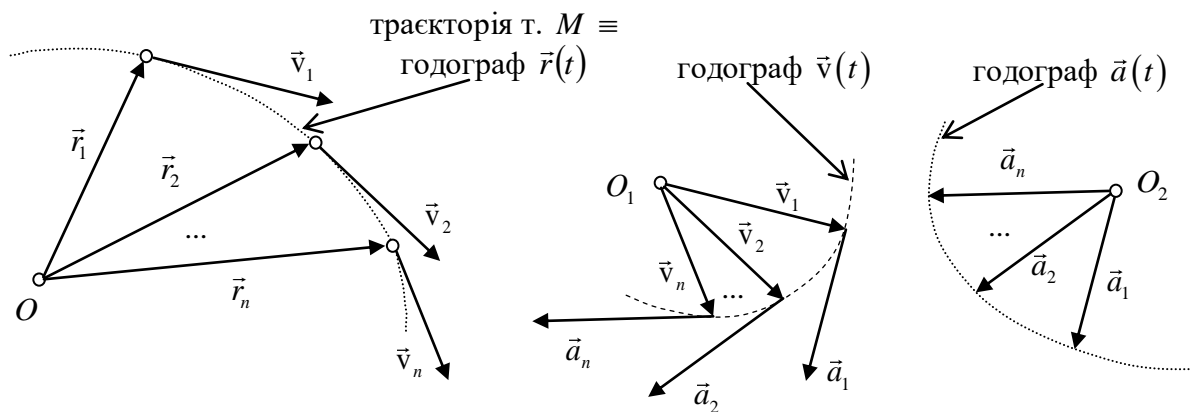


Рис. 5.15. Годографи $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ та $\vec{a}(t)$.

З виразу (5.17) випливає, що вектор прискорення точки завжди напрямлений по дотичній до годографа вектора швидкості в даній точці в бік зростання аргумента (t). Прискорення характеризує швидкість зміни вектора швидкості у часі.

б) Координатний спосіб задання руху точки

Відомим є радіус-вектор \vec{r} точки, який залежить від часу і може бути записаним через координати точки

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \quad (5.19)$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Знаходимо прискорення точки

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k},$$

таким чином маємо

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}, \quad (5.20)$$

звідки (беручи до уваги, що $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$) отримаємо

$$a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x, \quad a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y, \quad a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z. \quad (5.21)$$

Формула (5.20) визначає прискорення точки при координатному способі задання її руху, з неї випливає, що проекції прискорення точки на осі прямокутної декартової системи координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій швидкості точки або другим похідним за часом від відповідних координат точки.

Модуль і напрямок вектора \vec{a} визначимо так:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\cos(\vec{a}; Ox) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos(\vec{a}; Oy) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad \cos(\vec{a}; Oz) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

в) Прискорення точки при натуральному способі задання її руху

За відомою дуговою координатою $s(t)$ визначаємо швидкість точки

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau}, \quad (5.22)$$

і підставляємо цей вираз у формулу (5.17), звідки знаходимо прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_\tau \vec{\tau}) = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}, \quad (5.23)$$

Введемо позначення

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} \quad \text{і} \quad \vec{a}_n = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (5.24)$$

Розглянемо \vec{a}_τ . Воно називається *дотичним* або *тангенціальним* прискоренням точки, або дотичною складовою повного прискорення точки. Цей вектор завжди напрямлений по дотичній до траєкторії у даній точці. Його модуль a_τ характеризує зміну швидкості точки за величиною.

Оскільки

$$v_\tau = \dot{s}, \quad (5.25)$$

тому підставляючи цей вираз (5.25) в формулу (5.24), отримаємо

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s} \vec{\tau}, \quad (5.26)$$

звідки

$$a_\tau = \ddot{s}. \quad (5.27)$$

Розглянемо другий доданок у формулі (5.23), а саме $v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Оскільки орт $\vec{\tau}$ залежить від дугової координати s і є, таким чином, складною функцією часу, тобто $\vec{\tau} = \vec{\tau}[s(t)]$, тому перша похідна від нього за часом набуде вигляду

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$

Скориставшись першою формулою Френе

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad (5.28)$$

знайдемо першу похідну від орта $\vec{\tau}$ за дуговою координатою s :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \quad (5.29)$$

а з другої формули Френе за цієї умови

$$\vec{n} = \rho \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \rho \frac{d\vec{\tau}}{ds}, \quad (5.30)$$

впливає, що

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{n}. \quad (5.31)$$

Тоді $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v_\tau}{\rho} \vec{n}$, а другий доданок у формулі (5.23) дорівнює

$$\vec{a}_n = v_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v_\tau^2}{\rho} \vec{n} \quad (5.32)$$

і називається *нормальним* прискоренням точки або нормальною складовою повного прискорення точки. Вектор \vec{a}_n завжди напрямлений в бік увігнутості кривої до центру кривизни вздовж орта \vec{n} . Цей вектор (\vec{a}_n) характеризує зміну швидкості за напрямком.

Вектори \vec{a}_τ і \vec{a}_n знаходяться у стичній площині, отже вектор повного прискорення \vec{a} також знаходиться у цій площині. Тоді матимемо

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} + 0 \cdot \vec{b},$$

а рівняння (5.23) можна переписати у такому вигляді

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (5.33)$$

Зауважимо, що вектори \vec{a}_τ і \vec{a}_n взаємно перпендикулярні.

Таким чином, повне прискорення точки при натуральному способі задання її руху дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень точки (див. рис. 5.16), причому $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$.

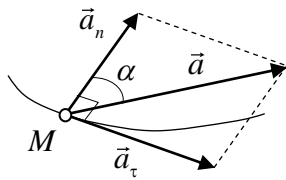


Рис. 5.16. Прискорення точки та його складові.

Вектор повного прискорення точки дорівнює

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n}.$$

Модуль повного прискорення вираховується за формулою

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2},$$

$$\text{де } a_{\tau} = \dot{v}, \text{ а } a_n = v^2 / \rho.$$

Радіус кривини ρ траєкторії точки визначається так: $\rho = v^2 / a_n$.

Задача

Точка рухається по гвинтовій лінії у відповідності до рівнянь:

$$x = 2 \cos 4t, \quad y = 2 \sin 4t, \quad z = 2t \quad (x, y, z - \text{в м}, \quad t - \text{в с}).$$

Визначити радіус кривини ρ траєкторії точки.

Розв'язання

Оскільки в умові задачі задані координати точки, тому запишемо у відповідному вигляді вирази для швидкості точки і її прискорення:

$$v_{\tau} = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_{\tau}^2}, \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}, \quad a_{\tau} = \dot{v}_{\tau} = \dot{v}.$$

Тоді шуканий радіус кривини ρ траєкторії точки визначиться за формулою

$$\rho = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{a^2 - \dot{v}^2}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 - \dot{v}^2}}.$$

Подальше розв'язання полягає в знаходженні необхідних похідних і підстановці їх в наведену формулу.

Тема 3.2. Кінематика точки (в рухомій системі координат)

Лекція 12

6. Кінематика точки в рухомій системі координат

6.1. Абсолютна і відносна похідні

Розглянемо рух точки M в рухомій системі координат $Oxyz$, яка, в свою чергу, рухається відносно нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$ (рис. 6.1).

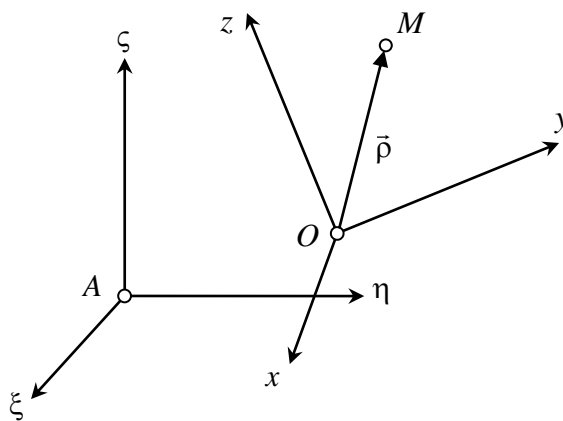


Рис. 6.1. Системи координат.

Розглянемо вектор \vec{r} , який характеризує положення точки в рухомій системі координат $Oxyz$.

Перша похідна за часом від вектора \vec{r} , яка характеризує його зміну в нерухомій системі координат, називається *абсолютною* похідною і позначається $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

Перша похідна за часом від вектора \vec{r} , яка характеризує його зміну в рухомій системі координат, називається *відносною* похідною і позначається $\frac{d'\vec{r}}{dt}$.

Для того, щоб встановити зв'язок між абсолютною і відносною похідними розглянемо формулу Бура.

6.2. Формула Бура

Розглянемо вираз вектора \vec{r} через його проекції в рухомій системі координат (рис. 6.2):

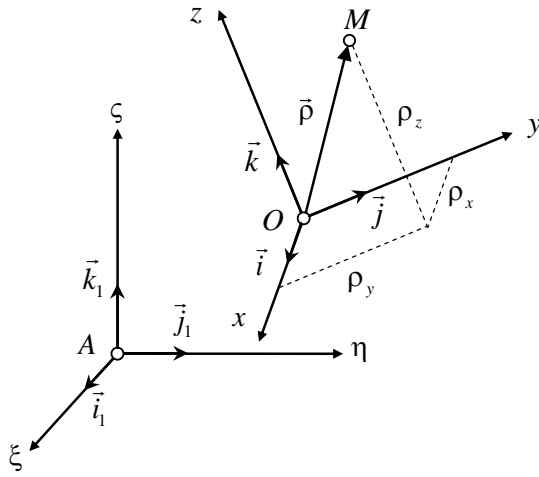


Рис. 6.2. Вектор \vec{r} в рухомій системі координат.

$$\vec{r} = \rho_x \vec{i} + \rho_y \vec{j} + \rho_z \vec{k},$$

і знайдемо абсолютну похідну від нього:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho_x \vec{i} + \rho_y \vec{j} + \rho_z \vec{k}).$$

Оскільки система координат $Oxyz$ рухається, то її осі не є сталими, і вираз абсолютної похідної має вигляд:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho_x}{dt} \vec{i} + \rho_x \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{d\rho_y}{dt} \vec{j} + \rho_y \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\rho_z}{dt} \vec{k} + \rho_z \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

У формулі (6.1) перші три доданки характеризують зміну вектора \vec{r} відносно похідною

$$\frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho_x}{dt} \vec{i} + \frac{d\rho_y}{dt} \vec{j} + \frac{d\rho_z}{dt} \vec{k}. \quad (6.2)$$

Останні три доданки у формулі (6.1) позначимо \vec{r}' , тобто

$$\vec{r}' = \rho_x \frac{d\vec{i}}{dt} + \rho_y \frac{d\vec{j}}{dt} + \rho_z \frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (6.3)$$

Помножимо скалярно обидві частини виразу (6.3) послідовно на орти $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\begin{cases} \rho'_x = \vec{r}' \cdot \vec{i} = \rho_x \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{i} + \rho_y \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{i} + \rho_z \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i}, \\ \rho'_y = \vec{r}' \cdot \vec{j} = \rho_x \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} + \rho_y \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{j} + \rho_z \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{j}, \\ \rho'_z = \vec{r}' \cdot \vec{k} = \rho_x \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{k} + \rho_y \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} + \rho_z \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{k}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Отримаємо деякі допоміжні співвідношення

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{i} \cdot \vec{i}) = \frac{d}{dt}(1) \Rightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{i} + \vec{i} \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{i} = 0};$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} + \vec{i} \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = -\frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{i}}.$$

Введемо наступні позначення:

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k}, \quad \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i}, \quad \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j}, \quad (6.5)$$

тоді формули (6.4) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \rho'_x = 0 - \rho_y \Omega_z + \rho_z \Omega_y = \rho_z \Omega_y - \rho_y \Omega_z, \\ \rho'_y = \rho_x \Omega_z + 0 - \rho_z \Omega_x = \rho_x \Omega_z - \rho_z \Omega_x, \\ \rho'_z = -\rho_x \Omega_y + \rho_y \Omega_x + 0 = \rho_y \Omega_x - \rho_x \Omega_y. \end{cases} \quad (6.6)$$

Ці вирази повністю збігаються з проекціями векторного добутку $\vec{\Omega} \times \vec{\rho}$ на осі системи координат $Oxyz$. Дійсно

$$\vec{\Omega} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ \rho_x & \rho_y & \rho_z \end{vmatrix} = (\rho_z \Omega_y - \rho_y \Omega_z) \vec{i} + (\rho_x \Omega_z - \rho_z \Omega_x) \vec{j} + (\rho_y \Omega_x - \rho_x \Omega_y) \vec{k}.$$

Тому має місце вираз

$$\vec{\rho}' = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}, \quad (6.7)$$

з урахуванням якого формула (6.1) набуває остаточного вигляду

$$\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}} \quad (6.8)$$

і називається *формулою Бура*.

Таким чином, абсолютна похідна від векторної функції $\vec{\rho}$ за скалярним аргументом t дорівнює сумі відносної похідної тієї ж функції та векторного добутку вектора $\vec{\Omega}$ на $\vec{\rho}$.

Формула Бура може застосовуватись до будь-якої неперервної векторної функції довільного скалярного аргументу і широко застосовується в розділі кінематики.

Наведемо деякі **частинні випадки формули Бура**.

1) Припустимо, що система координат $Oxyz$ є нерухомою відносно $A\xi\eta\zeta$, або рухається поступально.

В цьому випадку, оскільки орти є сталими, за формулами (6.5) маємо $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$, $\Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{0}$, і тоді формула Бура набуває вигляду $\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d'\vec{\rho}}{dt}}$.

2) Припустимо, що вектор $\vec{\rho}$ не змінюється в рухомій системі координат $Oxyz$, тоді $\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$ і отримуємо $\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}}$.

3) Припустимо, що вектор $\vec{\rho}$ не змінюється в нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$, тобто $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$. Тоді маємо $\boxed{\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = -\vec{\Omega} \times \vec{\rho}}$.

Тема 3.3. Складний рух точки

6.3. Основна задача складного руху точки

Якщо точка M рухається в рухомій системі координат $Oxyz$, яка, в свою чергу, рухається відносно нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$, тоді мова йде про *складний рух* точки M .

Зауважимо, що рухому систему координат, як правило, незмінно зв'язують з тілом, що рухається і переносить т. M .

Рух т. M в рухомій системі координат $Oxyz$ називається *відносним* рухом точки M . Відповідно в цьому русі відносними будуть траєкторія, швидкість та прискорення точки. Характеристики цього руху будемо позначати нижнім індексом „ r ” (relative - відносний), тобто \vec{v}_r і \vec{a}_r - є відповідно відносною швидкістю і відносним прискоренням т. M .

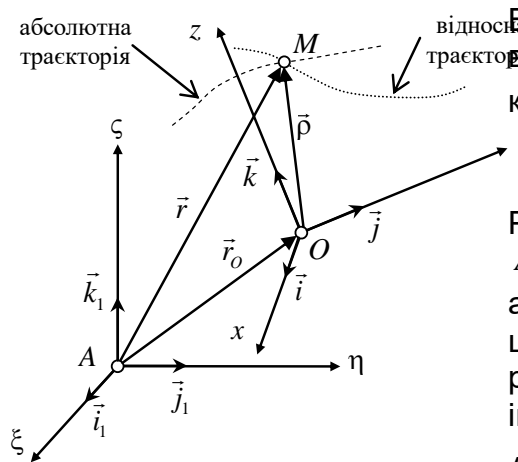


Рис. 6.3. Складний рух точки.

Відносний рух точки M задається її радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, або наступними кінематичними рівняннями (див. рис. 6.3):

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t). \quad (6.9)$$

Рух точки в нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$ називається *абсолютним*, відповідно абсолютними будуть називатися траєкторія, швидкість та прискорення точки в цьому русі, останні будуть позначатися з нижнім індексом „ a ” (absolute - абсолютний).

Абсолютний рух т. M визначається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, або наступними кінематичними рівняннями:

$$\xi = \xi(t), \eta = \eta(t), \zeta = \zeta(t). \quad (6.10)$$

Нарешті, рух тієї точки рухомої системи координат (або тіла, що переносить точку), з якою в даний момент часу збігається т. M , по відношенню до нерухомої системи координат, називається *переносним*; його характеристики матимуть нижній індекс „ e ” (d'entraînement - ведений).

Основна задача кінематики складного руху точки полягає у визначенні залежностей між кінематичними характеристиками точки в її відносному і абсолютному рухах, а також руху рухомої системи координат в нерухомій (переносного руху).

6.4. Кінематичні характеристики складного руху точки

Покажемо, як визначити швидкість і прискорення точки у відносному та абсолютному рухах, користуючись кінематичними рівняннями (6.9) і (6.10).

Так, відносна швидкість у рухомій системі координат визначиться за формулою

$$\vec{v}_r = v_{rx} \vec{i} + v_{ry} \vec{j} + v_{rz} \vec{k}, \quad (6.11)$$

де

$$v_{rx} = \dot{x}, \quad v_{ry} = \dot{y}, \quad v_{rz} = \dot{z}. \quad (6.12)$$

Тоді модуль відносної швидкості та її напрямні косинуси знаходяться за відомими формулами векторної алгебри:

$$v_r = \sqrt{v_{rx}^2 + v_{ry}^2 + v_{rz}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (6.13)$$

$$\begin{cases} \cos(\vec{v}_r; \hat{Ox}) = \frac{v_{rx}}{v_r} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\vec{v}_r; \hat{Oy}) = \frac{v_{ry}}{v_r} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\vec{v}_r; \hat{Oz}) = \frac{v_{rz}}{v_r} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{cases} \quad (6.14)$$

Таким же чином визначається і абсолютна швидкість \vec{v}_a точки M в нерухомій системі координат:

$$\vec{v}_a = v_{a\xi} \vec{i}_1 + v_{a\eta} \vec{j}_1 + v_{a\zeta} \vec{k}_1. \quad (6.15)$$

Використовуючи вирази (6.10) знаходимо проекції вектора абсолютної швидкості \vec{v}_a на осі нерухомої системи координат

$$v_{a\xi} = \dot{\xi}, \quad v_{a\eta} = \dot{\eta}, \quad v_{a\zeta} = \dot{\zeta}. \quad (6.16)$$

Модуль абсолютної швидкості та її напрямні косинуси знаходяться за аналогічними до виразів (6.13), (6.14) формулами.

Для визначення відповідних прискорень можна використовувати формули, подібні до наведених вище (6.13), (6.14), в яких треба лише замінити перші похідні за часом на другі.

Лекція 13

6.5. Формули перетворення швидкостей точки при її складному русі

Нехай т. M виконує складний рух, тобто одночасно рухається як в рухомій ($Oxyz$), так і в нерухомій ($A\xi\eta\zeta$) системах координат (див. рис. 6.3).

Радіус-вектори $\vec{\rho}$ і \vec{r} т. M однозначно визначають положення точки в рухомій та нерухомій системах координат відповідно.

Радіус-вектор \vec{r}_o визначає положення початку рухомої системи координат $Oxyz$ по відношенню до нерухомої $A\xi\eta\zeta$.

Ці радіус-вектори зв'язані очевидним співвідношенням:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{\rho}. \quad (6.17)$$

Продиференціюємо вираз (6.17), використовуючи формулу Бура

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_o + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_o + \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}, \quad (6.18)$$

де $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_a$ - абсолютна швидкість точки, $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_r$ - її відносна швидкість,

$\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \vec{v}_o$ - швидкість початку рухомої системи координат (т. O).

Таким чином, маємо

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_o + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}. \quad (6.19)$$

В цьому виразі (6.19) член $\vec{v}_o + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$ являє собою складову швидкості т. M , яка обумовлена лише рухом рухомої системи координат по відношенню до нерухомої (тобто переносним рухом) з кінематичними характеристиками \vec{v}_o , $\vec{\Omega}$. Дійсно, вектор \vec{v}_o визначає швидкість руху початку O рухомої системи координат $Oxyz$ відносно нерухомої $A\xi\eta\zeta$, а вектор $\vec{\Omega}$ характеризує швидкість зміни орієнтації рухомої системи координат по відношенню до нерухомої. Отже вираз $\vec{v}_o + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$ описує швидкість переносного руху або *переносну швидкість* – \vec{v}_e .

Отже, в результаті з виразу (6.19) отримуємо

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad (6.20)$$

щр є математичним записом *теорему про додавання швидкостей* при складному русі точки.

6.6. Формули перетворення прискорень при складному русі точки

Для знаходження абсолютного прискорення т. M при її складному русі скористаємось означенням прискорення при векторному способі задання руху точки і формулою (6.19) для абсолютної швидкості точки, тобто виразами (5.17) і (6.19):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{і} \quad \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_o + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}.$$

Тоді матимемо

$$\begin{aligned} \vec{a} = \vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{v}_r + \vec{v}_o + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) = \\ &= \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d'}{dt}(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}) = \\ &= \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Тут за означеннями маємо

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r, \quad \frac{d\vec{v}_o}{dt} = \vec{a}_o, \quad \frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{v}_r,$$

і тоді вираз (6.21) можна записати у спрощеному вигляді

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_o + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho}). \quad (6.22)$$

У виразі (6.22) доданок $2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$ називається *прискоренням Коріоліса* і позначається \vec{a}_c . Це прискорення виникає в результаті відносного руху точки і руху рухомої системи координат (його ще називають *перехресним*).

У формулі (6.22) доданок $\vec{a}_o + \frac{d'\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\rho})$ являє собою складову повного прискорення точки, яка обумовлена рухом рухомої системи координат відносно нерухомої (переносним рухом) з кінематичними характеристиками:

$$\vec{a}_o, \vec{\Omega}, \frac{d'\vec{\Omega}}{dt}, \text{ тобто переносним прискоренням } - \vec{a}_e.$$

Таким чином, маємо

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_c + \vec{a}_e \quad (6.23)$$

- формулу для перетворень прискорень точки при її складному русі.

Ця формула є математичним записом *теорему про додавання прискорень* при складному русі точки (*теорему Коріоліса*):

абсолютне прискорення точки, що виконує складний рух, дорівнює векторній сумі відносного, переносного і коріолісового прискорень.

Розглянемо застосування отриманих формул на наступному прикладі.

Задача

По радіусу диска, що обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\omega = 2t$ рад/с у напрямку від центру диска до його обода рухається точка M за законом $s = OM = 4t^2$, см (див. рис. 1). Радіус OM утворює з віссю O_1O_2 кут $\alpha = 60^\circ$.

Визначити величину абсолютної швидкості та абсолютного прискорення точки M у момент часу $t_* = 1$ с.

Дано: $\omega = 2t$ рад/с, $s = OM = 4t^2$, см, $t_* = 1$ с, $\alpha = 60^\circ$.

Знайти: \vec{v} , \vec{a} .

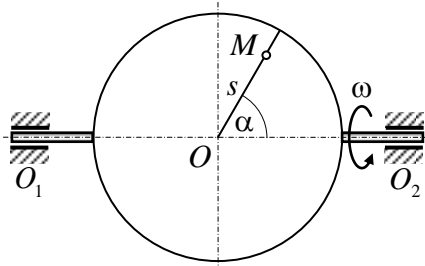


Рис. 1. Вихідна схема

Розв'язання

Розглянемо рух точки M як складний. Введемо дві системи координат: нерухому $A\xi\eta\zeta$ і рухому $Oxyz$. Останню жорстко зв'яжемо з диском таким чином, щоб її початок O збігався з точкою A , вісь Ox була напрямлена вздовж нерухомої осі обертання $A\xi$ (або O_1O_2), як показано на рис. 2.

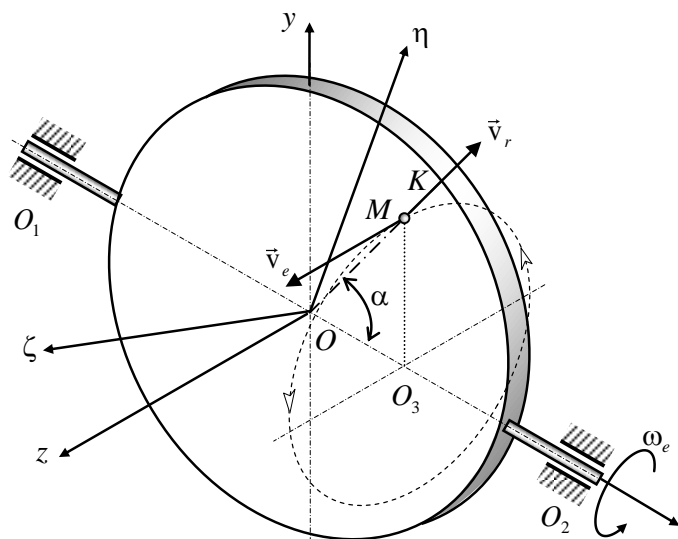


Рис. 2. Складові абсолютної швидкості

Відносним рухом точки M є її прямолінійний рух вздовж радіуса OK , переносним – обертальний рух диска навколо нерухомої осі O_1O_2 .

Для визначення кінематичних характеристик *відносного руху* точки M уявно зупинимо переносний рух, тобто рух диска, і обчислимо відносну швидкість і відносне прискорення за правилами кінематики точки, що здійснює рух по прямолінійній траєкторії. Маємо відповідно

$$v_r = \dot{s} = 8t, \text{ см/с},$$

$$a_r = a_{r\tau} = \dot{v}_r = \ddot{s} = 8 \text{ см/с}^2$$

($a_{rn} = 0$, оскільки траєкторія точки прямолінійна і отже радіус її кривизни $\rho \rightarrow \infty$).

В момент часу $t_* = 1$ с: $v_r = 8$ см/с, $a_r = 8$ см/с². Додатний знак величин v_r і a_r вказує на те, що вектори \vec{v}_r і \vec{a}_r напрямлені в бік зростання дугової координати s (рис. 2, 3).

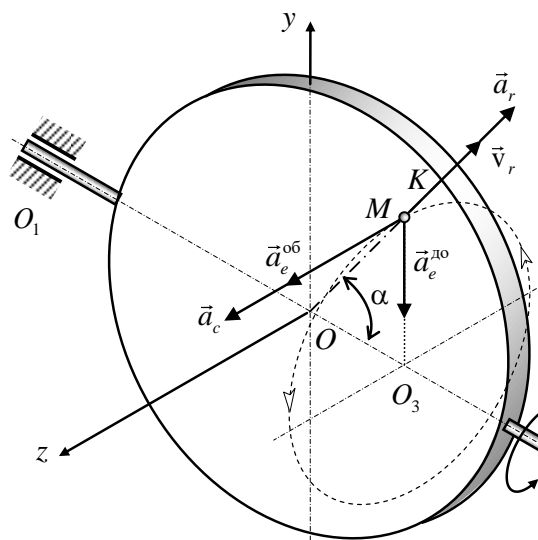


Рис. 3. Складові абсолютного прискорення

Для визначення кінематичних характеристик переносного руху точки M уявно зупинимо її відносний рух. Тоді переносними швидкістю і прискоренням точки M будуть швидкість і прискорення тієї точки диска, з якою в даний момент часу збігається рухома точка M . Оскільки диск здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі O_1O_2 , то переносна швидкість точки M складатиме

$$\vec{v}_e = \omega_e \cdot O_3M,$$

де $\omega_e = \omega$ - модуль кутової швидкості диска, а $O_3M = OM \sin \alpha$ - найкоротша відстань від точки M до осі O_1O_2 . Отже маємо

$$v_e = (2t) \cdot (4t^2) \sqrt{3} / 2 = 4\sqrt{3} t^3, \text{ м/с}.$$

В момент часу $t_* = 1 \text{ с}$ отримаємо $v_e = 4\sqrt{3} \text{ см/с}$.

Далі за теоремою про розподіл швидкостей при складному русі точки знаходимо абсолютну швидкість точки M як геометричну суму відносної і переносної швидкостей

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Оскільки вектори \vec{v}_e і \vec{v}_r взаємно перпендикулярні, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{8^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{112} = 10,6 \text{ см/с}.$$

Абсолютне прискорення точки M знаходимо за теоремою Коріоліса, математичний вираз якої має вигляд

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

і містить \vec{a}_e - переносне прискорення точки M , яке визначається за формулою

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^{\text{об}} + \vec{a}_e^{\text{до}},$$

$$\text{де } a_e^{\text{об}} = \varepsilon_e \cdot O_3M = \dot{\omega} \cdot OM \sin \alpha = 2 \cdot 4t^2 \sqrt{3} / 2 = 4\sqrt{3} t^2, \text{ см/с}^2;$$

$$a_e^{\text{до}} = \omega_e^2 \cdot O_3M = \omega^2 OM \sin \alpha = 4t^2 \cdot 4t^2 \sqrt{3} / 2 = 8\sqrt{3} t^4, \text{ см/с}^2.$$

В момент часу $t_* = 1 \text{ с}$ матимемо

$$a_e^{\text{об}} = 4\sqrt{3} \text{ см/с}^2, \quad a_e^{\text{до}} = 8\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Однаковий додатний знак v_e і $a_e^{\text{об}}$ вказує на те, що вектори переносної швидкості \vec{v}_e і переносного обертального прискорення $\vec{a}_e^{\text{об}}$ напрямлені в той бік, який відповідає напрямку обертального руху диска навколо осі O_1O_2 (рис. 2, 3), тобто паралельно додатному напрямку осі Oz по дотичній до кола радіуса O_3M в бік обертання тіла. Вектор переносного доосьового прискорення $\vec{a}_e^{\text{до}}$ напрямлений до осі обертання O_1O_2 , тобто вздовж радіуса обертання MO_3 (див. рис. 3).

Визначимо прискорення Коріоліса

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r,$$

відповідно його модуль складатиме

$$a_c = 2\omega_e v_r \sin(\omega_e, \vec{v}_r) = 2 \cdot 2t \cdot 8t \cdot \sin \alpha = 16\sqrt{3}t^2, \text{ см/с}^2.$$

В момент часу $t_* = 1 \text{ с}$ матимемо $a_c = 16\sqrt{3} \text{ см/с}^2$.

За правилом векторного добутку вектор \vec{a}_c спрямований перпендикулярно до площини, яка містить вектори \vec{v}_r і $\vec{\omega}_e$, тобто паралельно додатному напрямку осі Oz (рис. 3).

Тепер, щоб знайти модуль абсолютного прискорення, скористаємось методом проєкцій, для чого спроектуємо складові абсолютного прискорення (рис. 3) на осі рухомої системи координат $Oxyz$:

$$a_x = a_r \cos \alpha = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_y = a_r \sin \alpha - a_e^{\text{до}} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8\sqrt{3} = -4\sqrt{3} \text{ см/с}^2,$$

$$a_z = a_e^{\text{об}} + a_c = 4\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Потім знаходимо

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{4^2 + 16 \cdot 3 + 400 \cdot 3} = 35,56 \text{ см/с}^2.$$

Отже остаточні результати розрахунків такі:

- абсолютна швидкість точки M дорівнює $v = 10,6 \text{ см/с}$;
- абсолютне прискорення точки M складає $a = 35,56 \text{ см/с}^2$.

Лекція 14

7. Кінематика твердого тіла

Вільним тілом називається таке тверде тіло, яке може здійснити довільний рух з початкового положення в задане, для чого треба лише задатися визначеними механічними взаємодіями даного тіла з оточуючими його тілами (полями).

Невільним твердим тілом називається таке тверде тіло, для якого існують додаткові умови, що обмежують його рух.

Вивчаються п'ять видів руху твердого тіла:

- поступальний,
- обертальний навколо нерухомої осі,
- плоскопаралельний,
- обертальний рух навколо нерухомої точки (сферичний рух),
- вільний¹,

з яких перші два називаються найпростішими.

Тема 3.4. Найпростіші рухи твердого тіла

7.1. Поступальний рух твердого тіла

Рух твердого тіла називається *поступальним*, якщо відрізок прямої, проведеної через дві довільні точки даного тіла, залишається паралельним своєму початковому положенню під час руху тіла.

Приклад. Поступальний рух спарника АВ (див. рис. 7.1)

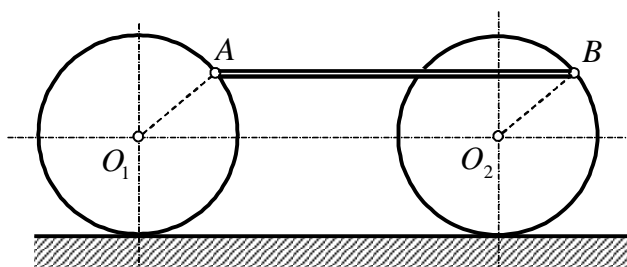


Рис. 7.1. Спарник коліс.

Розглянемо тіло G, яке здійснює поступальний рух у нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$ (див. рис. 7.2).

¹ Цей рух вивчається за наявності часу.

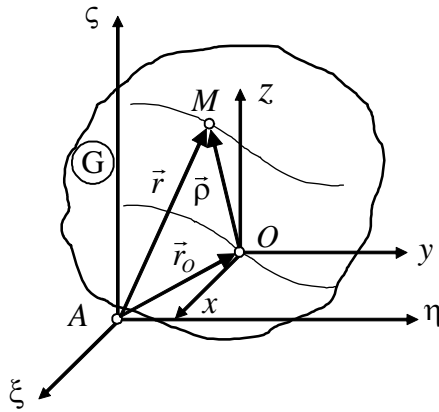


Рис. 7.2. Поступальний рух тіла G у нерухомій системі координат.

Кінці радіус-векторів $\vec{r}(t)$ та $\vec{r}_O(t)$ описують криві, які є відповідно траєкторіями точок M та O . Вони зв'язані очевидним співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}, \quad (7.1)$$

де вектор $\vec{\rho} = \overrightarrow{const}$ згідно з означенням поступального руху.

Перехід від траєкторії т. M до траєкторії т. O можна здійснити шляхом паралельного переносу на постійний вектор $\vec{\rho}$, тобто траєкторії тт. M і O є конгруентними фігурами, тобто такими, які при накладанні збігаються.

Узагальнюючи, робимо висновок: всі точки тіла, що рухається поступально, рухаються по конгруентним траєкторіям.

Далі знаходимо першу похідну за часом від виразу (7.1)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt}, \quad \text{або} \quad \vec{v} = \vec{v}_O. \quad (7.2)$$

Для тіла, що здійснює поступальний рух, всі його точки мають однакові за величиною та напрямком швидкості. Якщо продиференціювати вираз (7.2) ще раз за часом, то отримаємо

$$\vec{a} = \vec{a}_O. \quad (7.3)$$

Для даного тіла всі його точки мають однакові за величиною та напрямком прискорення.

Таким чином доведена наступна **теорема**:

при поступальному русі твердого тіла всі його точки рухаються по конгруентним траєкторіям з однаковими за величиною та напрямком швидкостями та прискореннями.

Отже, поступальний рух твердого тіла можна описати, вивчаючи рух будь-якої однієї його точки, наприклад, т. O . Тоді співвідношення

$$\begin{cases} \xi_O = \xi_O(t), \\ \eta_O = \eta_O(t), \\ \zeta_O = \zeta_O(t) \end{cases} \quad (7.4)$$

є кінематичними рівняннями поступального руху тіла. З рівнянь (7.4) випливає, що тверде тіло при поступальному русі має три степеня вільності.

7.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

а) Кінематичне рівняння руху

Рух твердого тіла, яке має дві нерухомі точки, називається **обертальним навколо нерухомої осі**, яка проходить через обидві вказані точки.

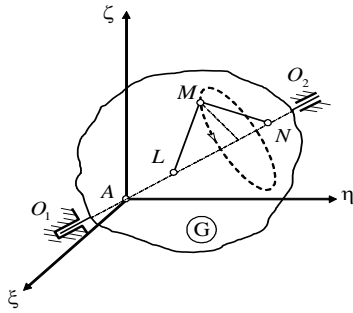


Рис. 7.3. Обертальний рух тіла G навколо нерухомої осі.

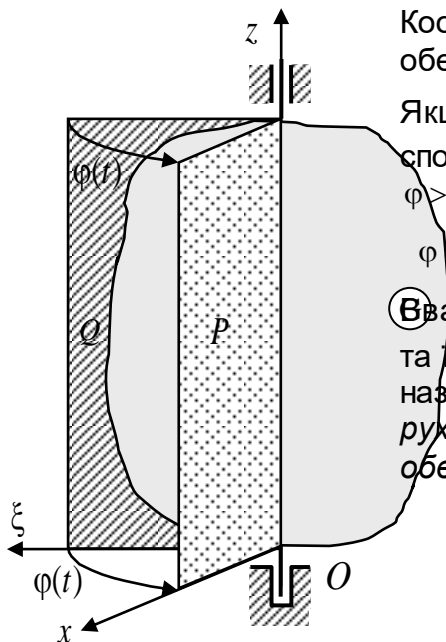
Розглянемо тверде тіло G , яке здійснює обертальний рух відносно нерухомої осі (рис. 7.3). Прямая LN , що проходить через дві нерухомі точки, називається **віссю обертання**.

Координати точок L та N задовольняють рівнянням:

$$(\xi_L - \xi_M)^2 + (\eta_L - \eta_M)^2 + (\zeta_L - \zeta_M)^2 = LM^2 = \text{const}, \quad (7.5)$$

$$(\xi_N - \xi_M)^2 + (\eta_N - \eta_M)^2 + (\zeta_N - \zeta_M)^2 = NM^2 = \text{const}.$$

З трьох координат т. M лише одна є незалежною, тому що дві інші автоматично задовольняють виразам (7.5), тобто тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має один степінь вільності. В якості змінної, за допомогою якої описується обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі, візьмемо функцію $\varphi(t)$, яка відображає зміну орієнтації твердого тіла в просторі з часом (рис. 7.4).



Координатну вісь Oz спрямуємо вздовж осі обертання.

Якщо з додатного напрямку осі Oz перехід від Q до P спостерігається проти ходу стрілки годинника, тоді $\varphi > 0$, інакше $\varphi < 0$. Таким чином, маємо

$$\varphi = \varphi(t). \quad (7.6)$$

Вважаємо, що функція $\varphi(t)$ - неперервна, однозначна та її можна двічі продиференціювати. Вираз (7.6) називають **кінематичним рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі** (або **законом обертального руху тіла навколо нерухомої осі**).

Рис. 7.4. Функція $\varphi(t)$.

б) Лінійна швидкість точки та кутова швидкість тіла

Знайдемо розподіл швидкостей точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі (рис. 7.5).

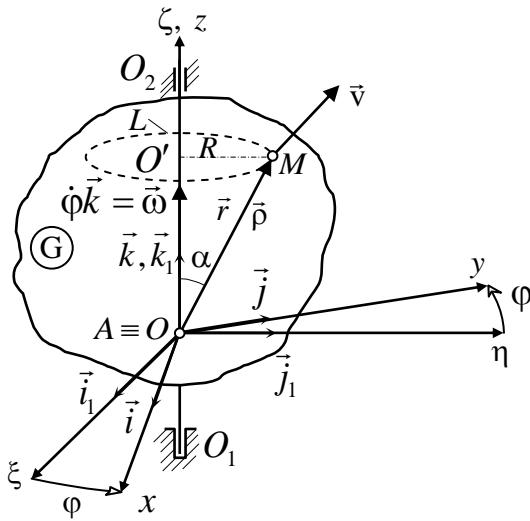


Рис. 7.5. До розподілу швидкостей.

З виразу (7.1) випливає, що в даному разі

$$\vec{r} = \vec{\rho}, \quad (7.7)$$

оскільки $\vec{r}_O = \vec{0}$ за умовою задачі. Тоді маємо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}, \quad (7.8)$$

але з іншого боку $\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$, тому (беручи до уваги, що $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$) матимемо

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}. \quad (7.9)$$

Розглянемо більш детально вектор $\vec{\Omega}$. Цей вектор у рухомій системі координат має вираз

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k},$$

де, як відомо, $\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k}$, $\Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i}$, $\Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j}$. Але у даному разі, оскільки

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}, \text{ матимемо}$$

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} = -\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{j} = 0, \quad \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i} = 0, \quad \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j},$$

тобто

$$\vec{\Omega} = \Omega_z \vec{k}. \quad (7.10)$$

Встановимо механічний зміст вектора $\vec{\Omega}$, та його зв'язок з функцією $\varphi(t)$.

З попереднього рисунка випливає, що

$$\vec{i} = \vec{i}_1 \cos \varphi + \vec{j}_1 \sin \varphi, \quad \vec{j} = -\vec{i}_1 \sin \varphi + \vec{j}_1 \cos \varphi.$$

Тоді $\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\phi}(-\vec{i}_1 \sin \varphi + \vec{j}_1 \cos \varphi) = \dot{\phi} \vec{j}$, а $\Omega_z = \dot{\phi} \vec{j} \cdot \vec{j} = \dot{\phi}$.

Остаточно маємо

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{k}. \quad (7.11)$$

Введемо наступне позначення: $\vec{\omega} = \dot{\phi} \vec{k}$. Вектор $\vec{\omega}$ визначає: вісь обертання, швидкість зміни кута повороту тіла з часом, напрямок обертання тіла. Цей вектор $\vec{\omega}$ називають *кутовою швидкістю обертання твердого тіла навколо нерухомої осі*.

Тоді вираз (7.9), враховуючи (7.7), набуває вигляду

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}, \quad (7.12)$$

і називається *формулою Ейлера*. Зауважимо, що $\vec{\omega}$ є ковзним вектором (напрямленим вздовж осі обертання).

Модуль швидкості точки M визначиться формулою

$$v = \omega r \sin(\vec{\omega}; \vec{r}) = \omega R, \quad (7.13)$$

де $R = r \sin(\vec{\omega}; \vec{r}) = r \sin \alpha$ - найкоротша відстань від точки M до осі обертання, яка називається *радіусом обертання даної точки*.

Вектор швидкості \vec{v} довільної точки M тіла G напрямлений по дотичній до кола L , по якому рухається т. M , тобто напрямок вектора \vec{v} повністю визначається векторним добутком (7.12), а його модуль v - звичайним добутком (7.13) модуля кутової швидкості тіла (ω) на радіус обертання точки (R).

Формулу (7.12) можна записати також за допомогою визначника:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (7.14)$$

Тоді $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega R$, а напрямок, як завжди, визначається відповідними напрямними косинусами.

Лекція 15

в) Лінійне прискорення точки та кутове прискорення тіла

Знайдемо розподіл прискорень точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі. Для цього згадаємо формулу (7.12) з попередньої лекції

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (7.15)$$

та знайдемо похідну від цього виразу за часом, тобто прискорення точки M :

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (7.16)$$

Введемо позначення: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_z \vec{k}) = \frac{d}{dt}(\dot{\phi} \vec{k}) = \ddot{\phi} \vec{k}, \quad (7.17)$$

оскільки, як і раніше, $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$. Зазначимо, що $\varepsilon_z = \ddot{\phi}$.

Механічний зміст вектора $\vec{\varepsilon}$ полягає в тому, що це є *кутове прискорення* твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Проекція вектора $\vec{\varepsilon}$ на нерухому вісь обертання (ε_z) дорівнює другій похідній від кута повороту тіла за часом ($\ddot{\phi}$). Вектор $\vec{\varepsilon}$ характеризує швидкість зміни з часом кутової швидкості тіла. Цей вектор напрямлений по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}$, тобто по осі обертання в той же бік, що й $\vec{\omega}$, якщо вони мають однакові знаки, або в протилежний, якщо ці знаки різні. В першому випадку обертання називається *прискоренням*, а в другому – *сповільненням*.

Повернемося до формули (7.16), яку можна переписати таким чином:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\text{об}} + \vec{a}^{\text{до}},$$

де складова

$$\vec{a}^{\text{об}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad (7.18)$$

з модулем

$$a^{\text{об}} = \varepsilon r \sin(\hat{\vec{\varepsilon}}, \hat{\vec{r}}) = \varepsilon R \quad (7.19)$$

називається *обертальним прискоренням* точки, а складова

$$\vec{a}^{\text{до}} = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (7.20)$$

з модулем

$$a^{\text{до}} = \omega v \sin(\hat{\vec{\omega}}, \hat{\vec{v}}) = \omega^2 R \quad (7.21)$$

називається *доосьовим прискоренням* точки.

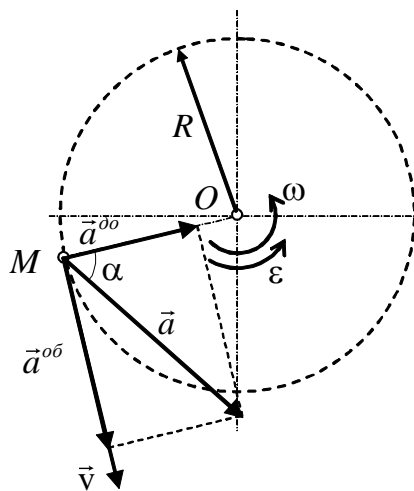
Векторні добутки (7.18) і (7.20) дозволяють зробити наступні висновки (див. рис. 7.6).

1) Вектор $\vec{a}^{об}$ напрямлений по дотичній до траєкторії т. M , тобто по вектору швидкості \vec{v} в тому разі, коли $\varepsilon > 0$, і в протилежний бік, якщо $\varepsilon < 0$. Таким чином, обертальне прискорення $\vec{a}^{об}$ є *дотичним*.

2) Вектор $\vec{a}^{до}$ завжди напрямлений по радіусу обертання до осі обертання, тобто по головній нормалі до траєкторії, і таким чином являє собою *нормальне* прискорення.

3) Величина обертального прискорення визначається за формулою (7.19), а доосьового – за (7.21).

4) Модуль повного прискорення і його напрямний тангенс визначаються за формулами



$$a = \sqrt{(a^{об})^2 + (a^{до})^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (7.22)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a^{об}}{a^{до}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Таким чином, доведена наступна **теорема**:

прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторній сумі обертального та доосьового прискорень цієї точки:

$$\vec{a} = \vec{a}^{об} + \vec{a}^{до}.$$

Рис. 7.6. Прискорення точки M та його складові.

Для визначення проєкцій повного прискорення точки на осі, наприклад, рухомої системи координат, необхідно скласти вираз, який містить суму двох визначників третього порядку:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача

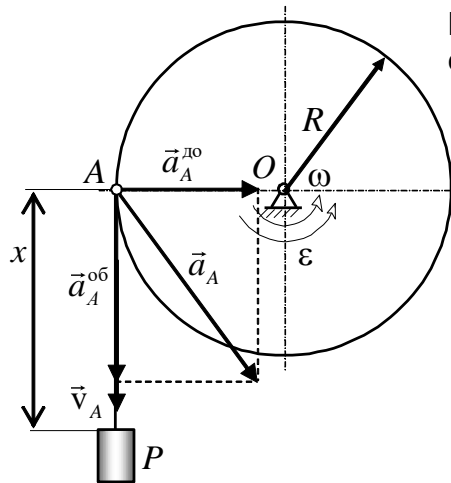
Вал $R=10\text{см}$ приводиться в рух гирею P , підвішеною до нього за допомогою нитки

(рис. 1). Рух гирі описується рівнянням $x=100t^2$, см (t - в секундах), де x - відстань від гирі до місця сходу нитки з поверхні валу. Визначити ω , ε , \vec{a}_A .

Дано: $R=10\text{см}$, $x=100t^2$, см (t - в секундах).

Знайти: ω , ε , \vec{a}_A .

Розв'язання



Визначимо швидкість точки A , оскільки вона є спільною для нитки та валу.

$$v_A = \frac{dx}{dt} = 200t, \text{ см/с. Але } v_A = \omega R, \text{ тому}$$

$$\omega = \frac{v_A}{R} = \frac{200 t \text{ см/с}}{10 \text{ см}} = 20t, \text{ рад/с.}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 20, \text{ рад/с}^2.$$

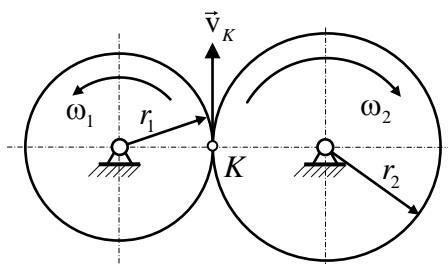
$$a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 200\sqrt{1 + 400t^4}, \text{ см/с}^2.$$

Рис. 1. Схема задачі.

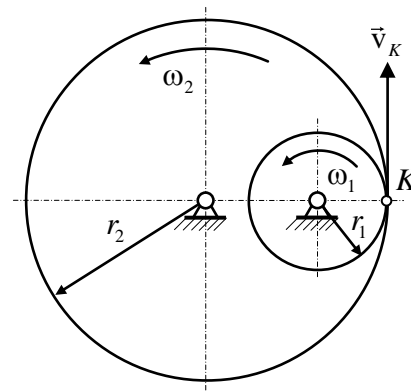
г) Прості передачі. Формули Вілліса

В інженерній практиці існує велика кількість механізмів і пристроїв, які передають рух від однієї ланки до іншої, змінюючи при цьому кінематичні характеристики руху. Вони називаються *передачами*. Найчастіше у ролі передач виступають найрізноманітніші колеса, які контактують (зчіплюються) одне з одним, передаючи рух.

Простими передачами називаються такі зчеплення (зовнішні або внутрішні) коліс, при яких всі колеса обертаються навколо нерухомих осей, що проходять через їхні центри (рис. 7.7).



а) Зовнішнє зчеплення



б) Внутрішнє зчеплення

Рис. 7.7. Приклади простих передач

Для розрахунку простих передач застосовуються *формули Вілліса*, які впливають із визначення швидкості \vec{v}_K точки K контакту коліс за формулою Ейлера:

$$v_K = \omega_1 r_1 = \pm \omega_2 r_2 \quad \text{або} \quad \boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}}. \quad (7.23)$$

У разі зовнішнього зчеплення коліс (рис. 7.7 а) вони обертаються в різні боки, тому у формулі (7.23) вибирається від'ємний знак, а в разі внутрішнього зчеплення (рис. 7.7 б) – додатний. Для зубчастих коліс кількість зубчиків пропорційна радіусу, тому у правій частині формул Вілліса (7.23) радіуси коліс можна замінити на число зубців (z_1 і z_2), і вони набувають вигляду

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}. \quad (7.24)$$

Іноки на практиці кутова швидкість обертання зубчастих коліс задається в обертах за хвилину (і позначається літерою n). Кутова швидкість ω (яка вимірюється в радіанах за секунду) зв'язана із n очевидним співвідношенням: $\omega = \frac{\pi}{30} n$, тобто через

сталий коефіцієнт $\frac{\pi}{30}$.

Тому дві попередні формули можна подавати у вигляді

$$\frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{r_2}{r_1} \quad \text{або} \quad \frac{n_1}{n_2} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

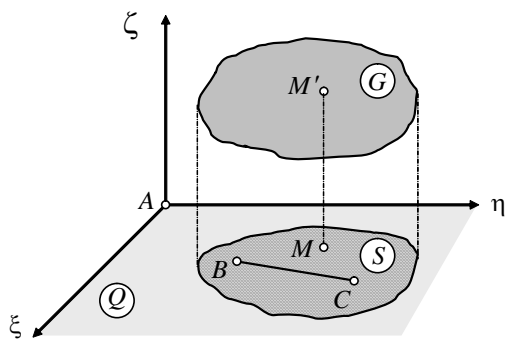
Лекція 16

Тема 3.5. Плоскопаралельний рух твердого тіла

7.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий його рух, під час якого всі точки даного тіла рухаються в площинах, паралельних деякій вибраній площині, яка зветься *основною*. Проекцію твердого тіла на основну площину будемо називати *плоскою фігурою*.

Користуючись наведеним означенням, а також властивістю твердого тіла зберігати незмінною відстань між двома довільними його точками, зведемо вивчення такого руху тіла в тривимірному просторі до дослідження руху плоскої фігури в основній площині.



Розглянемо тт. B і C плоскої фігури S (див. рис. 7.9). З чотирьох координат цих точок лише три є незалежними, тобто для опису руху плоскої фігури необхідні три незалежні координати у функції часу, отже тверде тіло G , що виконує плоскопаралельний рух має три степеня вільності.

Положення плоскої фігури S в основній площині Q буде визначатись залежностями

Рис. 7.9. До означення плоскопаралельного руху.

$$\begin{cases} \xi_o = \xi_o(t), \\ \eta_o = \eta_o(t), \\ \varphi = \varphi(t), \end{cases} \quad (7.25)$$

які є *кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху твердого тіла* (див. рис. 7.10).

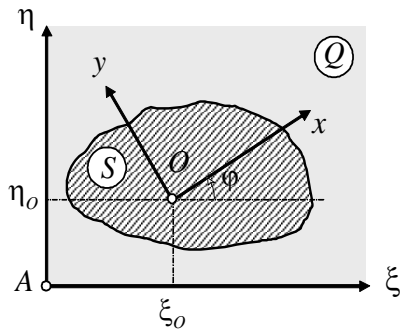


Рис. 7.10. Координати плоскої фігури S в основній площині Q .

а) Лінійна швидкість точки та кутова швидкість тіла

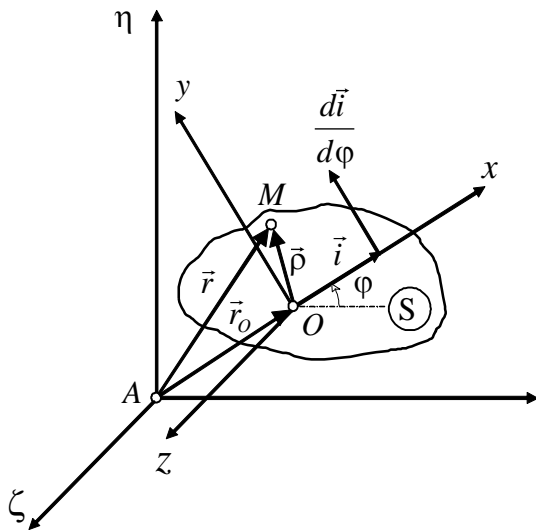
Розглянемо рух точки M плоскої фігури, яка рухається в основній площині $A\xi\eta$, та знайдемо її швидкість (рис. 7.11).

З рисунку випливає, що

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{\rho}. \quad (7.26)$$

Знайдемо швидкість т. M шляхом диференціювання виразу (7.26)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_O}{dt} + \frac{d'\vec{\rho}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}.$$



Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\frac{d\vec{r}_O}{dt} = \vec{v}_O$, $\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$, тому отримаємо

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{\rho}, \quad (7.27)$$

де $\vec{v}_{OM} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho}$ називають *обертальною швидкістю* т. M відносно т. O і записують

$$\vec{v}_{OM} = \vec{\Omega} \times \vec{OM}.$$

Визначимо зміст вектора $\vec{\Omega}$, який в рухомій системі координат можна записати таким чином:

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}.$$

Рис. 7.11. До визначення швидкості

Як і раніше (оскільки $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$), матимемо

$$\Omega_x = \frac{d\vec{j}}{dt} \cdot \vec{k} = -\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{j} = 0, \quad \Omega_y = \frac{d\vec{k}}{dt} \cdot \vec{i} = 0, \quad \Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j}.$$

Для того, щоб визначити похідну $\frac{d\vec{i}}{dt}$, згадаємо, що орт \vec{i} є складною функцією часу, а саме $\vec{i} = \vec{i}[\varphi(t)]$, тому

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{i}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (7.28)$$

Вектор $\frac{d\vec{i}}{d\varphi}$ напрямлений по дотичній до годографу вектора \vec{i} в бік зростання φ і його величина дорівнює одиниці, тобто

$$\frac{d\vec{i}}{d\varphi} = \vec{j}. \quad (7.29)$$

Якщо підставити формулу (7.29) у вираз (7.28), то отримаємо $\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\varphi} \vec{j}$.

В такому разі

$$\Omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = \dot{\varphi} \vec{j} \cdot \vec{j} = \dot{\varphi}. \quad (7.30)$$

При плоскопаралельному русі вектор $\vec{\Omega}$ являє собою вектор, який визначає швидкість зміни кута повороту тіла з часом. Цей вектор завжди напрямлений по осі z (по орту \vec{k}). Нагадаємо, що вісь z перпендикулярна до основної площини. Вектори $\vec{\Omega}$ і \vec{k} мають однаковий напрямок, якщо $\dot{\varphi} > 0$, і протилежний, якщо $\dot{\varphi} < 0$. Величина проекції Ω_z вектора $\vec{\Omega}$ на вісь z дорівнює першій похідній від кута повороту φ за часом.

Введемо позначення:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{k}, \quad (7.31)$$

де $\vec{\omega}$ - кутова швидкість при плоскопаралельному русі.

Тоді лінійна швидкість точки M запишеться у вигляді

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM}, \quad (7.32)$$

що є математичним записом наступної теореми.

Теорема: при плоскопаралельному русі швидкість довільної точки M дорівнює векторній сумі швидкості полюса ($m. O$) і обертальної швидкості $m. M$ в її русі відносно $m. O$ (див. рис. 7.12).

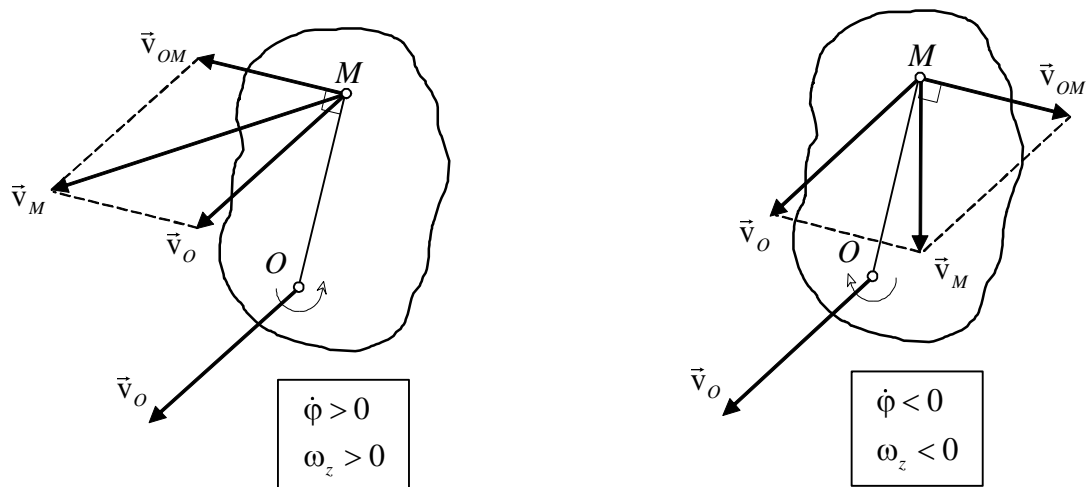


Рис. 7.12. До визначення швидкості при плоскопаралельному русі
Модуль вектора швидкості т. M визначається за теоремою косинусів:

$$v_M = \sqrt{v_O^2 + v_{OM}^2 + 2v_O v_{OM} \cos(\vec{v}_O, \vec{v}_{OM})}.$$

Якщо спроектувати вираз (7.32) на пряму OM , то отримаємо

$$\ddot{I} \partial_{OM} \vec{v}_M = \ddot{I} \partial_{OM} \vec{v}_O + \ddot{I} \partial_{OM} \vec{v}_{OM},$$

але, оскільки $\ddot{I} \partial_{OM} \vec{v}_{OM} = 0$, то матимемо

$$\ddot{I} \partial_{OM} \vec{v}_M = \ddot{I} \partial_{OM} \vec{v}_O, \quad (7.33)$$

щр є виразом **теорема Грасгофа**: проекції швидкостей двох точок твердого тіла на пряму, що їх з'єднує, є рівними.

Це твердження є кінематичним означенням абсолютно твердого тіла.

Лекція 17

б) Миттєвий центр швидкостей (МЦШ)

Розглянемо плоску фігуру S , що рухається в нескінченній основній площині Q .

Миттєвим центром швидкостей (МЦШ) називається така точка основної площини, незмінно зв'язана з плоскою фігурою, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

При русі плоскої фігури МЦШ змінює своє положення. Геометричне місце МЦШ в нерухомій площині утворює *нерухому центроїду*, а геометричне місце МЦШ в рухомій площині (в системі координат, жорстко зв'язаною з плоскою фігурою) утворює *рухому центроїду*. В кожний момент часу t рухома та нерухома центроїди мають спільну точку, якою є МЦШ.

Покажемо, що для кожного моменту часу t існує єдина точка, швидкість якої дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я

Будемо вважати, що деяка точка A даного тіла має $\vec{v}_A \neq \vec{0}$, а також припустимо, що для даного тіла $\vec{\omega} \neq 0$, тоді, приймаючи т. A за полюс, матимемо:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{AM},$$

або

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

де $\vec{\rho} = \overrightarrow{AM}$ - це вектор, який визначає положення т. M відносно т. A . Тоді

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}.$$

Розглянемо т. P , для якої $\vec{v}_P = \vec{0}$ (тобто т. P є МЦШ):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

Тоді

$$-\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}.$$

Помножуючи векторно цей вираз зліва на $\vec{\omega}$, отримаємо

$$-(\vec{\omega} \times \vec{v}_A) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}).$$

Згадуючи далі формулу для подвійного векторного добутку $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, можна записати

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP}) - \overrightarrow{AP}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}),$$

а помітивши, що $\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$, оскільки $\vec{\omega} \perp \overrightarrow{AP}$ і $\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, можна отримати

$$-(\vec{\omega} \times \vec{v}_A) = -\overrightarrow{AP}\omega^2,$$

або

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}. \quad (7.34)$$

Таким чином, МЦШ розташований на перпендикулярі в т. A до вектору \vec{v}_A на відстані

$$AP = \frac{\omega v_A \sin 90^\circ}{\omega^2} = \frac{v_A}{\omega} \quad (7.35)$$

від неї. Ця формула дає змогу *аналітично* визначити положення МЦШ.

З формул (7.34) і (7.35) випливає, що:

- 1) МЦШ знаходиться на перпендикулярі до вектора швидкості заданої точки;
- 2) співвідношення швидкостей двох точок даного тіла дорівнює співвідношенню відстаней від цих точок до МЦШ:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}; \quad (7.36)$$

- 3) кутова швидкість тіла, що виконує плоскопаралельний рух дорівнює відношенню швидкості довільної точки до відстані цієї точки до МЦШ:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \dots \quad (7.37)$$

Положення МЦШ може бути визначено *графічно*, якщо відомі напрямки векторів швидкостей двох точок плоскої фігури. З формули (7.34) випливає, що швидкість будь-якої точки плоскої фігури перпендикулярна до прямої, що проходить через дану точку та МЦШ. Тому, якщо наприклад, в точках A і B відновити перпендикуляри до швидкостей цих точок, то їх перетин і буде МЦШ (рис. 7.13).

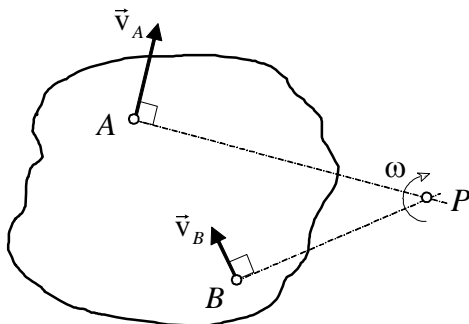


Рис. 7.13. До визначення положення МЦШ

Частинні випадки визначення положення МЦШ¹

¹ Точка P на подальших рисунках.

)

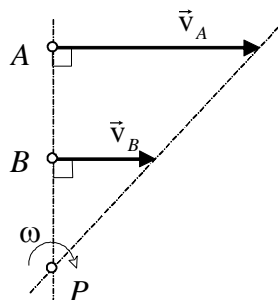


Рис. 7.14. Паралельні і однонаправлені вектори швидкостей

Якщо через дві точки твердого тіла можна провести пряму, яка перпендикулярна до векторів швидкостей цих точок, тоді МЦШ знаходиться на перетині вказаної прямої та прямої, що проходить через кінці векторів швидкостей даних точок (рис. 7.14). Крім того, маємо

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \dots$$

)

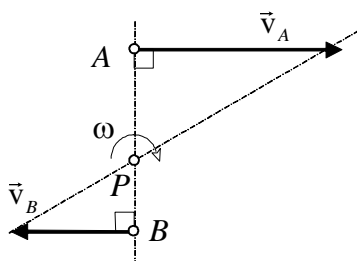


Рис. 7.15. Паралельні і протилежно напрямлені вектори швидкостей

Якщо швидкості двох точок перпендикулярні до відрізка (AB), що їх з'єднує, і напрямлені в різні боки, тоді МЦШ (рис. 7.15) знаходиться на перетині цього відрізка та прямої, що проходить через кінці векторів швидкостей.

)

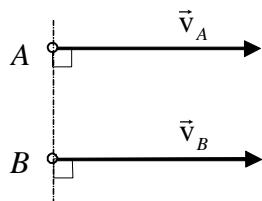


Рис. 7.16. Миттєво-поступальний рух

Якщо швидкості двох точок перпендикулярні до відрізка, що їх з'єднує, напрямлені в один бік та мають однакові модулі, тоді МЦШ прямує у нескінченність, кутова швидкість дорівнює нулю, що відповідає *миттєво-поступальному рухові* (рис. 7.16).

Тоді маємо:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}, \quad \omega \rightarrow 0, \quad AP \rightarrow \infty.$$

Із співвідношень (7.35), (7.37) випливає, що в кожний момент часу тіло, яке виконує плоскопаралельний рух, можна розглядати як тіло, що здійснює обертальний рух навколо осі, яка проходить через МЦШ (P) перпендикулярно до площини фігури (миттєва вісь обертання).

Задача

За відомої швидкості центра мас колеса, що котиться у вертикальній площині, та його радіуса, знайти швидкості точок A і B та кутову швидкість колеса (рис. 1).

Дано: v_O , R .

Знайти: ω , \vec{v}_B , \vec{v}_A .

Розв'язання

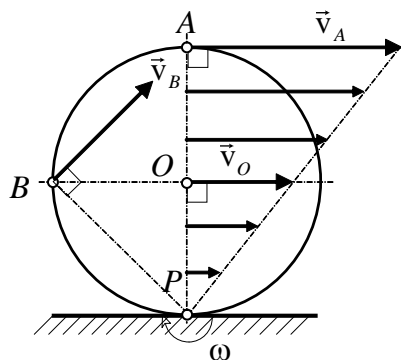


Рис. 1. Колесо, що котиться у вертикальній площині

Напрямок вектора швидкості довільної точки тіла, яке виконує плоскопаралельний рух, знаходиться шляхом визначення напрямку обертання даного тіла (за відомим вектором швидкості) відносно МЦШ.

Кутова швидкість даного тіла визначиться за формулою:

$$\omega = \frac{v_O}{OP} = \frac{v_O}{R}.$$

Далі:

$$v_B = \omega \cdot BP = \frac{v_O}{R} R\sqrt{2} = v_O\sqrt{2};$$

$$v_A = \omega \cdot AP = \frac{v_O}{R} 2R = 2v_O.$$

Лекція 18

в) Лінійне прискорення точки та кутове прискорення тіла

Знайдемо прискорення довільної точки твердого тіла, яке виконує

плоскопаралельний рух:

$$\begin{aligned}\vec{a}_M &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \left(\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}.\end{aligned}$$

Враховуючи, що $\frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{a}_O$, а $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, матимемо

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{OM}. \quad (7.38)$$

Введемо наступні позначення для складових прискорення \vec{a}_M :

$$\vec{a}_{OM}^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM} \quad (7.39)$$

- є *обертальною* складовою прискорення, а

$$\vec{a}_{OM}^{\text{до}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OM}) \quad (7.40)$$

- є його *доосьювою* складовою.

Крім цього,

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \vec{k}) = \ddot{\varphi} \vec{k}, \quad (7.41)$$

а

$$\varepsilon_z = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = \ddot{\varphi} \vec{k} \cdot \vec{k} = \ddot{\varphi}. \quad (7.42)$$

Із виразів (7.41) і (7.42) випливає, що $\vec{\varepsilon}$ являє собою вектор, який характеризує швидкість зміни кутової швидкості тіла. Вектор $\vec{\varepsilon}$ напрямлений по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}$, тобто вздовж осі Oz (по орту \vec{k}), що вказано в формулі (7.41). Проекція вектора $\vec{\varepsilon}$ на вісь Oz дорівнює другій похідній від кута φ повороту тіла за часом.

Вектори $\vec{\varepsilon}$ та \vec{k} напрямлені в один бік, якщо $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} > 0$, і в протилежні боки, якщо $\varepsilon_z = \ddot{\varphi} < 0$.

Таким чином, вектор $\vec{\varepsilon}$ називається вектором *кутового прискорення* тіла, що виконує плоскопаралельний рух (рис. 7.17).

При $\varepsilon > 0$ \vec{v}_{OM} та $\vec{a}_{OM}^{\text{об}}$ напрямлені в один бік, а якщо $\varepsilon < 0$, тоді \vec{v}_{OM} та $\vec{a}_{OM}^{\text{об}}$ напрямлені в протилежні боки.

З виразу (7.39) випливає, що обертальне прискорення т. M відносно т. O напрямлене перпендикулярно до радіус-вектора $\vec{\rho}$, тобто завжди вектор $\vec{a}_{OM}^{\text{об}}$ є

колінеарним до вектора обертальної швидкості тієї ж точки відносно того ж центра, а його модуль дорівнює:

$$a_{OM}^{об} = \varepsilon \rho \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}) = \varepsilon \rho = \varepsilon OM. \quad (7.43)$$

Розглянемо вираз (7.40):

$$\vec{a}_{OM}^{до} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{OM}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \overline{OM}) - \overline{OM}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\overline{OM}\omega^2$$

(оскільки $\vec{\omega} \cdot \overline{OM} = 0$, тому що $\vec{\omega} \perp \overline{OM}$). Таким чином маємо

$$\vec{a}_{OM}^{до} = -\overline{OM}\omega^2 = \omega^2 \overline{MO}. \quad (7.44)$$

Із виразу (7.44) випливає, що доосьова складова обертального прискорення т. M відносно т. O завжди напрямлена від т. M до т. O , а її величина визначається формулою (див. рис. 7.17):

$$a_{OM}^{до} = \omega^2 OM = \omega^2 \rho. \quad (7.45)$$

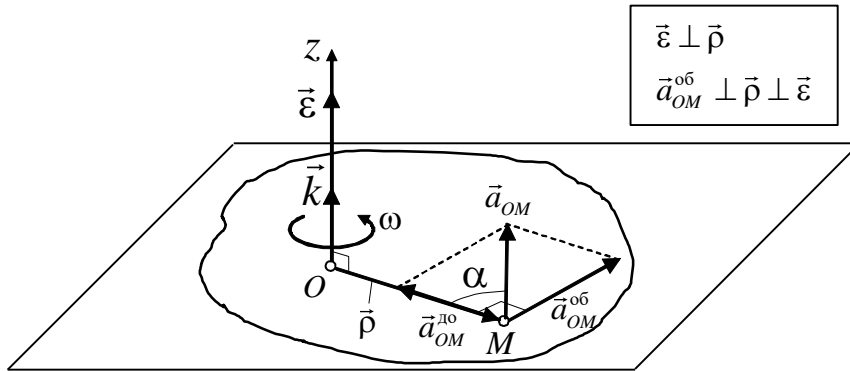


Рис. 7.17. Складові повного обертального прискорення точки M та кутове прискорення тіла

Зауважимо, що $\vec{a}_{OM}^{до}$ називається ще й *доцентровим прискоренням* т. M ($\vec{a}_{OM}^{дц}$) в її русі навколо т. O , тобто

$$\vec{a}_{OM}^{до} \equiv \vec{a}_{OM}^{дц}.$$

Сума $\vec{a}_{OM}^{до} + \vec{a}_{OM}^{об}$ називається *повним обертальним прискоренням* т. M відносно т. O :

$$\vec{a}_{OM} = \vec{a}_{OM}^{до} + \vec{a}_{OM}^{об}. \quad (7.46)$$

Перепишемо вираз (7.38), беручи до уваги наведені вище позначення:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{OM}^{об} + \vec{a}_{OM}^{до}, \quad (7.47)$$

який, в свою чергу, запишемо у вигляді:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{OM}, \quad (7.48)$$

згадавши про суму (7.46).

Наведені вирази (7.47) і (7.48) є математичним записом наступної теореми.

Теорема: прискорення довільної точки M тіла, що виконує плоскопаралельний рух, дорівнює векторній сумі прискорення полюса (т. O) і обертового та доосового прискорень т. M в її русі відносно полюса.

Надамо графічне пояснення цій теоремі (див. рис. 7.19).

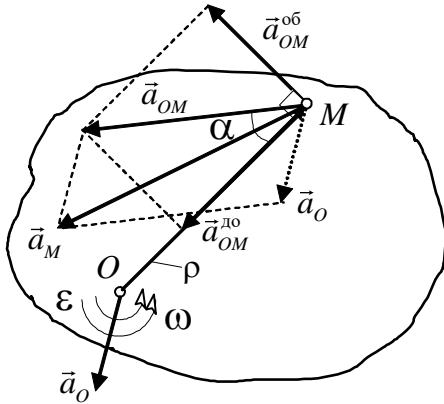


Рис. 7.19. Повне прискорення точки M при плоскопаралельному русі

Кут α , який утворюється повним обертовим прискоренням т. M відносно т. O і вектором \overrightarrow{MO} , має такий *напрямний тангенс*:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{OM}^{\text{об}}}{a_{OM}^{\text{до}}} = \frac{\varepsilon OM}{\omega^2 OM} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Оскільки $\vec{a}_{OM}^{\text{об}}$ завжди перпендикулярний до вектора $\vec{a}_{OM}^{\text{до}}$, тому можна визначити величину повного обертового прискорення т. M відносно т. O за теоремою Піфагора:

$$a_{OM} = \sqrt{(a_{OM}^{\text{об}})^2 + (a_{OM}^{\text{до}})^2} = \sqrt{\varepsilon^2 OM^2 + \omega^4 OM^2} = OM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

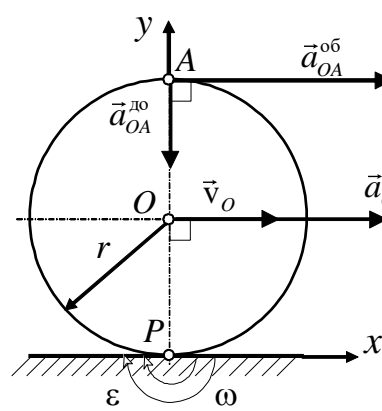
Задача

Для колеса, що котиться у вертикальній площині по горизонтальній рейці, знайти прискорення найвищої його точки A (див. рис. 1), якщо радіус колеса r , швидкість центра мас \vec{v}_O та його прискорення \vec{a}_O відомі.

Дано: r, v_O, a_O .

Знайти: \vec{a}_A .

Розв'язання



Повне прискорення т. А визначимо за формулою (7.47):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{OA}^{ob} + \vec{a}_{OA}^{do}, (*)$$

$$\text{де } a_{OA}^{ob} = \varepsilon OA, \quad a_{OA}^{do} = \omega^2 OA.$$

Точка P - миттєвий центр швидкостей, тому

$$\omega = \frac{v_O}{r}, \quad \varepsilon = \frac{a_O}{r}.$$

Далі отримаємо:

$$a_{OA}^{ob} = \varepsilon OA = \varepsilon OP = \varepsilon r = \frac{a_O}{r} r = a_O;$$

Рис. 1. Схема задачі.

$$a_{OA}^{do} = \omega^2 OA = \frac{v_O^2}{r^2} r = \frac{v_O^2}{r}.$$

Прискорення \vec{a}_A знайдемо за методом проекцій: спроектуємо ліву та праву частини рівняння (*) на осі x та y:

$$\begin{cases} a_{Ax} = (\vec{a}_A)_x = (\vec{a}_O)_x + (\vec{a}_{OA}^{ob})_x + (\vec{a}_{OA}^{do})_x = a_O + a_{OA}^{ob} = a_O + a_O = 2a_O; \\ a_{Ay} = (\vec{a}_A)_y = (\vec{a}_O)_y + (\vec{a}_{OA}^{ob})_y + (\vec{a}_{OA}^{do})_y = -a_{OA}^{do} = -\frac{v_O^2}{r}. \end{cases}$$

Далі знаходимо модуль вектора \vec{a}_A та відповідні напрямні косинуси:

$$a_A = \sqrt{(a_{Ax})^2 + (a_{Ay})^2} = \sqrt{4a_O^2 + \frac{v_O^4}{r^2}};$$

$$\cos(\vec{a}_A, Px) = \frac{a_{Ax}}{a_A} = \frac{2a_O}{\sqrt{4a_O^2 + \frac{v_O^4}{r^2}}} = \frac{2a_O r}{\sqrt{4a_O^2 r^2 + v_O^4}},$$

$$\cos(\vec{a}_A, Py) = \frac{a_{Ay}}{a_A} = \frac{-v_O^2 / r}{\sqrt{4a_O^2 + \frac{v_O^4}{r^2}}} = -\frac{v_O^2}{\sqrt{4a_O^2 r^2 + v_O^4}}.$$

Лекція 19

г) Миттєвий центр прискорень (МЦП)

Задача про розподіл прискорень точок твердого тіла, яке виконує плоскопаралельний рух, спрощується, якщо в якості полюса вибрати точку, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Миттєвим центром прискорень (МЦП) називається така точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

МЦШ і МЦП для даного тіла взагалі є різними точками, вони збігаються лише для тіла, яке виконує обертальний рух навколо нерухомої осі.

Розглянемо деякі **способи визначення МЦП** (т. Q).

– Аналітичний спосіб

Припустимо, що прискорення тт. M і A відомі, також відомі ω і ε даного тіла.

Якщо вибрати полюс в т. A , тоді матимемо:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{AM}.$$

Тепер виберемо за полюс т. Q , прискорення якої дорівнює нулю. Тоді з виразу

$$\vec{a}_M = \vec{a}_Q + \vec{a}_{QM}$$

матимемо:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{QM}. \quad (7.49)$$

В свою чергу

$$\vec{a}_{QM} = \vec{a}_{QM}^{\text{об}} + \vec{a}_{QM}^{\text{до}},$$

де

$$a_{QM} = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (7.50)$$

Із виразів (7.49) і (7.50) випливає, що за величиною прискорення т. M дорівнює

$$a_M = a_{QM} = QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (7.51)$$

і крім цього

$$\frac{a_M}{QM} = \frac{a_B}{QB} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (7.52)$$

На підставі виразів (7.50) – (7.52) можна зробити висновок, що якщо полюс сумістити з миттєвим центром прискорень, тоді розподіл прискорень точок даного тіла буде таким же, як і у разі обертального руху цього ж тіла навколо осі, що проходить через МЦП перпендикулярно до основної площини.

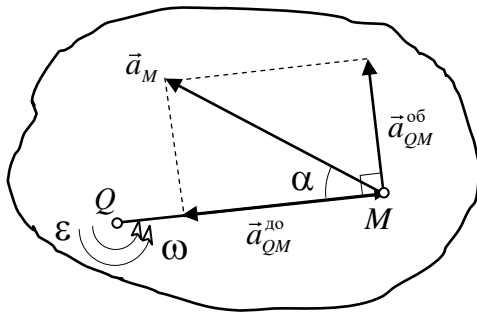


Рис. 7.20. До визначення положення МЦП аналітичним способом

Тоді напрямний танг

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{QM}^{\text{об}}}{a_{QM}^{\text{до}}} = \frac{\varepsilon QM}{\omega^2 QM} =$$

Відрізок QM визнач

$$QM = \frac{a_M}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Далі, для того, щоб знайти положення МЦП Q (МЦП), треба покласти формулою (7.53), за якою знайдено повернутого прискорення

відкласти на ньому відстань MQ , обчислену за формулою (7.54), як показано на рис. 7.20.

Частинні випадки визначення МЦП

1) Нехай $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$, тоді

$\operatorname{tg} \alpha = \infty \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, а з виразу (7.52) отримаємо (див. рис. 7.21):

$$\frac{a_A}{QA} = \frac{a_B}{QB} = \dots = \varepsilon.$$

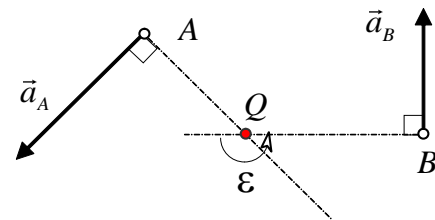


Рис. 7.21. Визначення МЦП за умови $\omega = 0$

2) Нехай $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$, тоді

$\operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$, а з виразу (7.52) матимемо (рис. 7.22):

$$\frac{a_A}{QA} = \frac{a_B}{QB} = \dots = \omega^2.$$

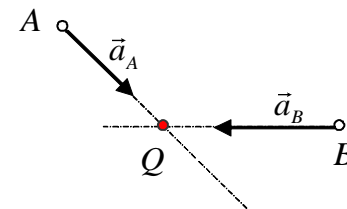


Рис. 7.22. Визначення МЦП за умови $\varepsilon = 0$

3) Нехай $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$, тоді вектори прискорень всіх точок рівні за величиною і однакові за напрямком (рис. 7.23).

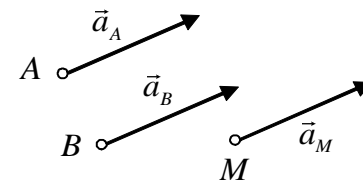


Рис. 7.23. Визначення МЦП за умови $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$

Таким чином, у першому випадку вектори прискорень всіх точок плоскої фігури будуть перпендикулярні до відрізків, які з'єднують ці точки з МЦП. В другому випадку для визначення МЦП необхідно провести промені від точок в напрямках прискорень до їх перетину.

– Геометричний спосіб визначення МЦП

Геометричний спосіб визначення МЦП базується на тій властивості, що прискорення будь-яких точок плоскої фігури утворюють в кожний момент часу один і той же кут з відрізками, які з'єднують ці точки з МЦП.

Покажемо, яким чином можна знайти МЦП, якщо відомі прискорення двох точок (A і B) даної плоскої фігури (див. рис. 7.24).

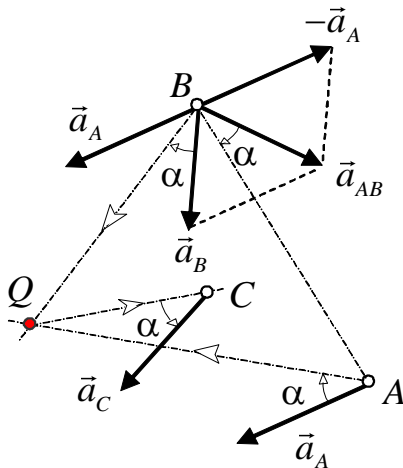


Рис. 7.24. Визначення МЦП геометричним способом

Вибираючи т. A за полюс, отримаємо

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB},$$

звідки

$$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_B - \vec{a}_A.$$

Побудувавши вектор повного обертального прискорення (\vec{a}_{AB}) т. B відносно т. A , визначимо кут α між ним та вектором \overrightarrow{BA} за найкоротшим шляхом. Далі той же кут α відкладаємо в тому ж напрямку від векторів \vec{a}_A та \vec{a}_B і проводимо промені від тт. A і B . Точка перетину отриманих променів і буде шуканим МЦП.

Напрямок, в якому треба відкладати кут α від \vec{a}_A і \vec{a}_B відповідає напрямку повороту вектора \vec{a}_{AB} відносно т. B до його

суміщення із вектором \overrightarrow{BA} за найкоротшим шляхом (або напрямку кутового прискорення $\vec{\epsilon}$ тіла).

Якщо ж положення МЦП відоме, тоді, діючи в зворотній послідовності, можна знайти прискорення будь-якої іншої точки тіла (наприклад, т. C). Відповідні побудови показані на рис. 7.24. Модуль прискорення \vec{a}_C визначиться за формулою (7.52):

$$a_C = \frac{QC}{QA} a_A = \frac{QC}{QB} a_B.$$

Задача

Для нецентрального кривошипно-шатунного механізму, у положенні, зображеному на рис. 1, знайти кутову швидкість і кутове прискорення шатуна AB , лінійні швидкості та прискорення точок A і B , а також положення його МЦШ і МЦП, якщо відомі довжини кривошипа OA і шатуна AB , кутова швидкість ω_O обертання кривошипа, кут β , та $\angle OAB = 90^\circ$.

Дано: $OA, AB, \omega_O, \beta, \angle OAB = 90^\circ$.

Знайти: $\omega, \epsilon, \vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{a}_A, \vec{a}_B$, МЦШ і МЦП.

Розв'язання

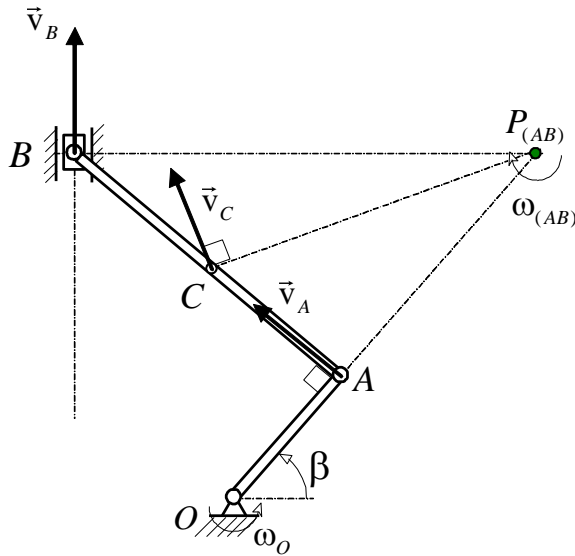


Рис. 1. Нецентральний кривошипно-шатунний механізм

Зауважимо, що тіло OA виконує обертальний рух навколо нерухомої осі O , а тіло AB - плоскопаралельний рух.

1) Визначимо спочатку швидкості тт. A і B та кутову швидкість тіла AB :

$$v_A = \omega_O \cdot OA,$$

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{BP}{AP} \Rightarrow v_B = \frac{BP}{AP} v_A,$$

але, оскільки $AP = BP \cos \beta$,

$BP = AB / \sin \beta$, тому

$$v_B = \frac{BP}{BP \cos \beta} v_A = \frac{OA}{\cos \beta} \omega_O.$$

Напрямок обертання ланки AB визначаємо за напрямком вектора швидкості відомої точки відносно МЦШ, знайденого для даної ланки. Тоді напрямок векторів швидкостей всіх точок даного тіла буде відповідати знайденому напрямку обертання тіла.

2) Кутова швидкість ланки AB визначається формулою:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{OA \sin \beta}{AB \cos \beta} \omega_O = \frac{OA}{AB} \operatorname{tg} \beta \cdot \omega_O.$$

3) Визначимо прискорення тт. A і B , а також кутове прискорення ε ланки AB (див. рис. 2).

Оскільки тіло OA виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, тому

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\text{об}} + \vec{a}_A^{\text{до}},$$

але $a_A^{\text{об}} = \varepsilon_O OA = 0$ (тому що $\omega_O = \text{const} \Rightarrow \varepsilon_O = \frac{d\omega_O}{dt} = 0$), а $a_A^{\text{до}} = \omega_O^2 OA$, тому

матимемо

$$a_A = a_A^{\text{до}} = \omega_O^2 OA.$$

Приймаючи т. A за полюс, визначимо за теоремою про розподіл прискорень при плоскопаралельному русі твердого тіла (AB) прискорення т. B :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{AB}^{\text{об}} + \vec{a}_{AB}^{\text{до}},$$

де $a_{AB}^{\text{об}} = \varepsilon AB$, а $a_{AB}^{\text{до}} = \omega^2 AB$ (ω - визначено вище). Проектуючи це рівняння на напрямок AB та на перпендикуляр до AB , отримаємо (див. рис. 2):

$$\text{➤ на } AB: a_B \cos \beta = a_{AB}^{\text{до}} = \omega^2 AB, \text{ звідки знаходимо шукане } a_B = \frac{\omega^2 AB}{\cos \beta};$$

➤ на перпендикуляр до AB : $a_B \sin \beta = a_A - a_{AB}^{\text{об}}$, або $\frac{\omega^2 AB}{\cos \beta} \sin \beta = \omega_o^2 OA - \varepsilon AB$,

звідки отримаємо шукане кутове прискорення ланки AB :

$$\varepsilon = \frac{1}{AB} (\omega_o^2 OA - \omega^2 AB \operatorname{tg} \beta).$$

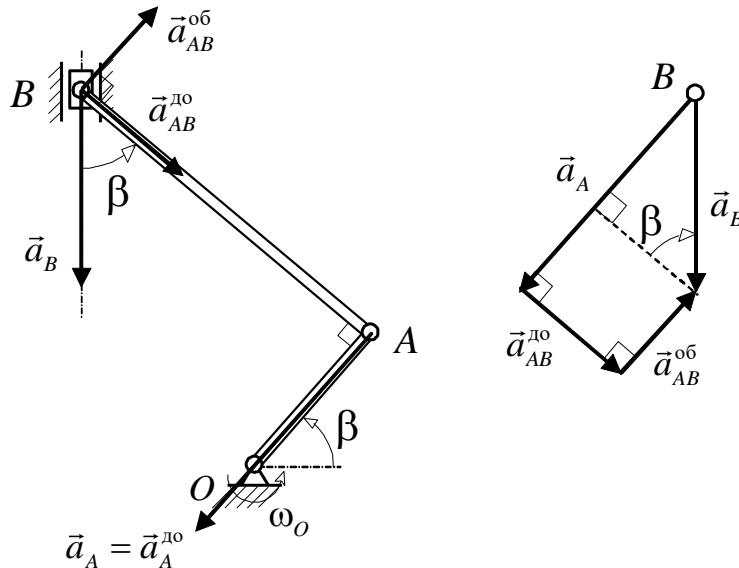
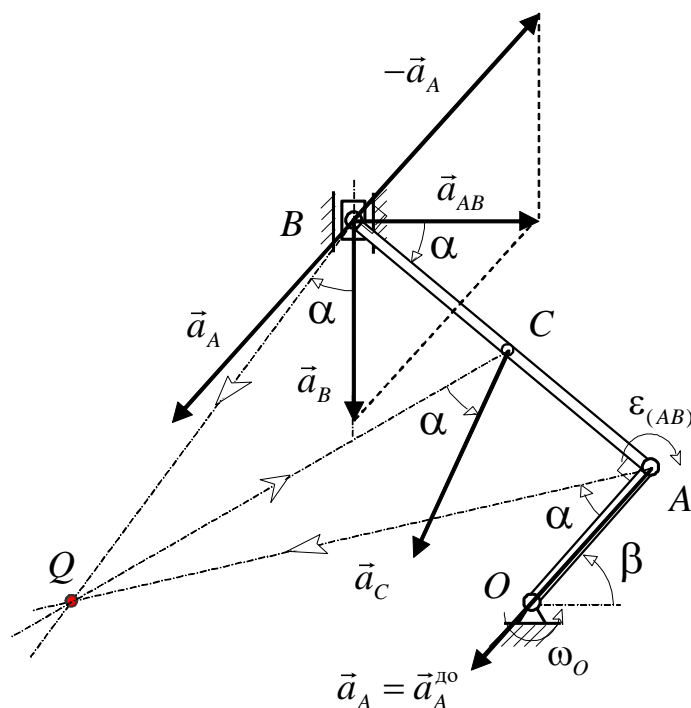


Рис. 2. Знаходження прискорень точок A і B та кутового прискорення шатуна

AB



4) Визначення МЦП ланки AB здійснюється наступним чином.

Скористаємося геометричним способом, знайшовши за формулою (7.54) \vec{a}_{AB} , та визначивши кут α .

Необхідні побудови для визначення МЦП наведені на рис. 3.

Якщо потім треба визначити прискорення будь-якої іншої точки (наприклад, т. C) ланки AB , тоді необхідно провести побудови в зворотному напрямку, йдучи від МЦП, та застосувати формулу (7.52).

Рис. 3. До визначення МЦП шатуна AB

Лекція 20

Тема 3.6. Сферичний рух твердого тіла

7.4. Сферичний рух твердого тіла

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої точки називається такий його рух, при якому одна точка твердого тіла залишається нерухомою. Він також називається *сферичним*, оскільки траєкторії всіх точок тіла розташовуються на поверхнях концентричних сфер з центром в нерухомій точці.

а) Кути Ейлера та кінематичні рівняння сферичного руху

Покажемо, що положення твердого тіла з однією нерухомою точкою характеризується трьома належним чином вибраними кутами.

Для цього введемо дві системи координат: рухому $Oxyz$, жорстко зв'язану з тілом, і нерухому $A\xi\eta\zeta$, сумістивши їх початок в одній точці.

В такому разі є справедливою **теорема 1 (Ейлера)**:

перехід від нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$ до рухомої $Oxyz$, а отже довільне переміщення твердого тіла, можна здійснити за допомогою трьох послідовних поворотів у визначеній послідовності навколо вибраних належним чином осей.

Доведення

Оскільки мова йде про геометричну інтерпретацію повороту системи координат $Oxyz$, тому будемо використовувати сферу одиничного радіуса.

У початковий момент часу системи координат $Oxyz$ і $A\xi\eta\zeta$ збігаються.

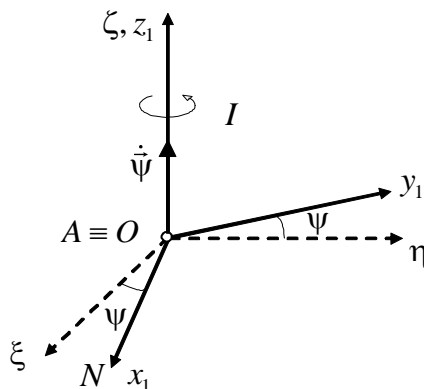


Рис. 7.25. Перший поворот

Таблиця 7.1. Напрямні косинуси

| | ξ | η | ζ |
|-------|------------------------------------|---|--|
| x_1 | $\cos(\hat{\xi}; x_1) = \cos \psi$ | $\cos(\hat{\eta}; x_1) = \cos(90^\circ - \psi) = \sin \psi$ | $\cos(\hat{\zeta}; x_1) = \cos 90^\circ = 0$ |

Перший поворот системи координат $Oxyz$, який здійснюється навколо нерухомої віссі $A\xi$ і руху з швидкістю цього повороту дорівнює $\dot{\psi}$.

Тоді рухома система координат займе своє положення.

Для цього повороту матриця напрямних косинусів від $A\xi\eta\zeta$ до $Ox_1y_1z_1$ визначається за допомогою

| | | | |
|-------|---|---------------------------------------|--|
| y_1 | $\cos(\xi; y_1) = \cos(90^\circ + \psi) = -\sin \psi$ | $\cos(\eta; y_1) = \cos \psi$ | $\cos(\zeta; y_1) = \cos 90^\circ = 0$ |
| z_1 | $\cos(\xi; z_1) = \cos 90^\circ = 0$ | $\cos(\eta; z_1) = \cos 90^\circ = 0$ | $\cos(\zeta; z_1) = \cos 0^\circ = 1$ |

Вона має вигляд

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Перетворення координат при цьому переході можна виконати за допомогою наступної матричної операції

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^T = A_\psi \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}^T.$$

Аналогічним чином здійснюються наступні повороти: **другий поворот** – навколо лінії вузлів ON на *кут нутації* θ (кутова швидкість цього повороту складатиме $\dot{\theta}$), при цьому рухома система координат $Oxyz$ займе положення $Ox_2y_2z_2$, а вісь Oy_1 – своє остаточне положення $Oy_2 \equiv Oy$; і **третій поворот** – навколо осі $Oy_2 \equiv Oy$ на *кут власного обертання* φ (з кутовою швидкістю $\dot{\varphi}$)¹. В результаті третього повороту система координат $Oxyz$ займе своє кінцеве положення.

Цим поворотам відповідають матриці A_θ і A_φ .

Всі разом кути ψ , θ , φ називаються *кутами Ейлера*, а залежності

$$\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t) \quad (7.55)$$

є *кінематичними рівняннями руху* рухомої системи координат відносно нерухомої.

Оскільки кожному моменту часу відповідає означене положення тіла і означені кути Ейлера, тому залежності (7.55) можуть бути прийняті за кінематичні рівняння руху тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Одночасно вони визначають *закон руху тіла*.

Таким чином, вислідний перехід від координат точки в нерухомій системі координат до її координат в рухомій системі можна отримати так

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = A_\varphi \left\{ A_\theta \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^T \right\} = A_\varphi A_\theta \left\{ A_\psi \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}^T \right\} = A_\varphi A_\theta A_\psi \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}^T,$$

або

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = A_\varphi A_\theta A_\psi \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}^T. \quad (7.56)$$

Це є формула для перетворення координат при переході від нерухомої до рухомої системи координат, який здійснюється за допомогою трьох поворотів на кути Ейлера, тому вислідна матриця A_2 цього переходу матиме вигляд

$$A_2 = A_\varphi A_\theta A_\psi. \quad (7.57)$$

Тоді формула (7.56) набуде вигляду

¹ Тут використовується послідовність поворотів, запропонована О. М. Криловим, за якою останній (третій) поворот здійснюється навколо осі Oy_2 , а не Oz_2 , як у Л. Ейлера.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}^T. \quad (7.58)$$

Якщо підставити в формулу (7.57) отримані вище вирази матриць \mathbf{A}_φ , \mathbf{A}_θ , \mathbf{A}_ψ , тоді після громіздких перетворень отримаємо

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \sin \theta & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \sin \theta & \sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

Для переходу від нерухомої до рухомої системи координат треба за відомими кутами Ейлера обчислити \mathbf{A}_2 за формулою (7.59), потім підставити її в формулу (7.58) і отримати координати точки в рухомій системі координат.

У разі переходу від рухомої до нерухомої системи координат, слід скористуватися формулою

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix}^T = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T, \quad (7.60)$$

де матрицю \mathbf{A}_1 можна отримати шляхом транспонування матриці \mathbf{A}_2 у вигляді (7.59).

Зауважимо, що перехід від рухомої до нерухомої системи координат здійснюється шляхом поворотів на кути Ейлера в зворотному порядку: $I \rightarrow \varphi$, $II \rightarrow \theta$, $III \rightarrow \psi$, і в протилежному напрямку.

Рівняння (7.58) або (7.60) також є *кінематичними рівняннями руху твердого тіла з однією нерухомою точкою*. В них коефіцієнти a_{ij} є функціями трьох незалежних величин – кутів Ейлера.

За допомогою рівнянь (7.60) можна визначити положення будь-якої точки тіла в рухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$.

б) Миттєво-обертальний рух твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Миттєва кутова швидкість тіла

Нагадаємо без доведення наступну теорему про два малих послідовних повороти навколо перетинних осей.

Теорема 2: *два послідовних малих повороти тіла навколо осей, що перетинаються, можуть бути замінені одним малим вислідним поворотом, що дорівнює геометричній сумі доданків – векторів поворотів.*

Зауважимо, що зміна послідовності малих поворотів не має впливу на вислідний поворот на відміну від кінцевих поворотів.

Миттєва кутова швидкість

На підставі **теорем 1 і 2** можна записати:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{j}, \quad (7.61)$$

отже кутова швидкість тіла, що обертається навколо нерухомої точки, визначиться як сума кутових швидкостей складових поворотів. Тут \vec{k}_1 , \vec{n} і \vec{j} - одиничні вектори осей $A\xi$, ON та Oy відповідно (див. рис. 7.26).

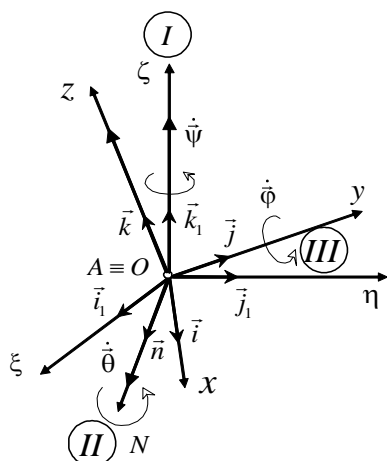


Рис. 7.26. До визначення миттєвої кутової швидкості

Формула (7.61) показує, що вектор $\vec{\omega}$ повністю характеризує швидкість зміни орієнтації рухомої системи координат відносно нерухомої, тобто

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\Omega}. \quad (7.62)$$

Із виразів (7.61) і (7.62) випливає, що $\vec{\omega} \equiv \vec{\Omega}$ лише умовно можна назвати вектором кутової швидкості твердого тіла, оскільки не знайдеться жодного такого кута повороту, похідна за часом від якого дорівнювала б $\vec{\omega}$.

Для сферичного руху тіла кути Ейлера можуть бути будь-якими і необов'язково малими, вектор $\vec{\omega}$ в кожний момент часу збігається з вектором $\vec{\Omega}$, тому вектор $\vec{\omega}$ називається *миттєвою кутовою швидкістю тіла*, і згідно з правилом, він напрямлений вздовж миттєвої осі обертання (МВО).

Прикладом сферичного руху тіла, який можна розглядати як миттєво-обертальний, є *регулярна прецесія*, при якій кути $\psi(t)$ та $\phi(t)$ є лінійними функціями часу, а кут $\theta(t) = \text{const}$.

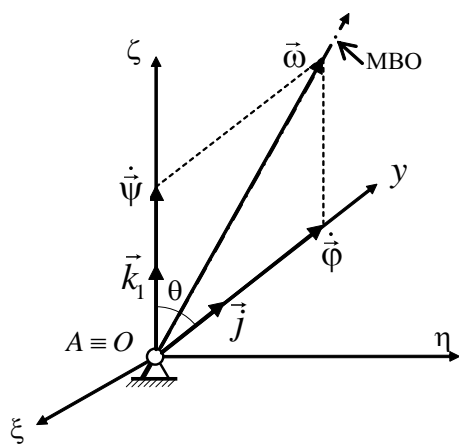


Рис. 7.27. Кутова швидкість у випадку регулярної прецесії

У цьому разі матимемо

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\phi} \vec{j} = \dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\phi} \vec{j}.$$

У випадку регулярної прецесії вектор миттєвої кутової швидкості $\vec{\omega}$ визначається як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\dot{\psi} \vec{k}_1$ і $\dot{\phi} \vec{j}$ як на сторонах (див. рис. 7.27). Лінія дії отриманого вектора $\vec{\omega}$ визначає МВО.

в) Кутове прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої точки

За означенням

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

але вектор $\vec{\varepsilon}$ можна лише умовно назвати кутовим прискоренням твердого тіла, оскільки й вектор $\vec{\omega}$ є лише умовною кутовою швидкістю.

Розглянемо декілька способів визначення $\vec{\varepsilon}$.

– I-й спосіб визначення $\vec{\varepsilon}$

Використовуються кінематичні рівняння Ейлера, які дозволяють визначити проекції вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ на осі рухомої та нерухомої систем координат (див. табл. 7.2)².

Таблиця 7.2. Визначення кутового прискорення за кінематичними рівняннями Ейлера

| В рухомій системі координат: | В нерухомій системі координат: |
|---|--|
| $\begin{cases} \omega_x = -\dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}, \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \varphi; \end{cases}$ | $\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \theta, \\ \omega_\eta = \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta, \\ \omega_\zeta = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta; \end{cases}$ |
| $\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-\dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \varphi), \\ \varepsilon_y = \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}), \\ \varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \varphi); \end{cases}$ | $\begin{cases} \varepsilon_\xi = \frac{d\omega_\xi}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \theta), \\ \varepsilon_\eta = \frac{d\omega_\eta}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta), \\ \varepsilon_\zeta = \frac{d\omega_\zeta}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta); \end{cases}$ |
| $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2}.$ | |

Із наведених співвідношень видно, що проекції вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ на осі рухомої та нерухомої систем координат дорівнюють першим похідним за часом від відповідних проекцій $\vec{\omega}$ на ті ж самі осі.

– II-й спосіб визначення $\vec{\varepsilon}$

Цей спосіб побудований на використанні складових кутового прискорення. Для цього згадаємо, що будь-яка векторна функція $\vec{f}(u)$ скалярного аргументу u може бути

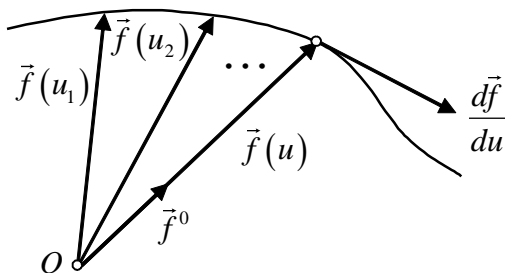


Рис. 7.28. Похідна від векторної функції скалярного аргументу

представлена у вигляді

$$\vec{f} = f \vec{f}^0,$$

де f - модуль цієї функції, а \vec{f}^0 - одиничний вектор її напрямку (рис. 7.28).

Тоді похідна $\frac{d\vec{f}}{du}$ від цієї функції за скалярним аргументом u буде напрямлена по дотичній до її годографа (траєкторії кінця вектора

² Студентам рекомендується самостійно розглянути доведення кінематичних рівнянь Ейлера за допомогою матриці \mathbf{A}_2 .

\vec{f} при неперервній зміні скалярного аргументу u) і може бути записана у вигляді:

$$\frac{d\vec{f}}{du} = \frac{d(f \vec{f}^0)}{du} = \frac{df}{du} \vec{f}^0 + f \frac{d\vec{f}^0}{du}.$$

Згадуючи означення (8), представимо вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ у вигляді

$$\vec{\omega} = \omega \vec{\omega}^0,$$

де $\vec{\omega}^0$ - одиничний вектор (орт), який визначає напрямок вектора $\vec{\omega}$. Тоді для похідної за часом від векторної функції $\vec{\omega}(t)$ скалярного аргументу (часу t) матимемо такий вираз

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega \vec{\omega}^0)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}^0 + \omega \frac{d\vec{\omega}^0}{dt} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,$$

де складова $\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega}^0$ вказує на зміну $\vec{\omega}$ за величиною, а складова $\vec{\varepsilon}_2 = \omega \frac{d\vec{\omega}^0}{dt}$ вказує на зміну вектора $\vec{\omega}$ за напрямком (рис. 7.29).

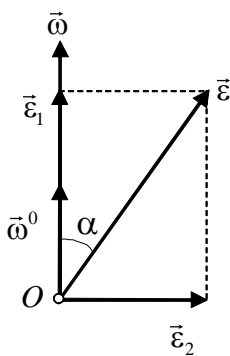


Рис. 7.29. Кутове прискорення та його складові

Зауважимо, що завжди $\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2$ (довести самостійно).

Далі за відомими формулами визначаються модуль вектора $\vec{\varepsilon}$ та його напрямний тангенс:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\vec{\omega}, \vec{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

В частинному випадку, коли $\vec{\omega} = \overline{const}$ (наприклад, при рівномірному обертанні навколо нерухомої осі), матимемо $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}$, а $\vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}$.

Зауважимо, що при сферичному русі твердого тіла вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ орієнтовані довільним чином по відношенню один до одного, в той час, коли при обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі ці вектори колінеарні (рис. 7.30).

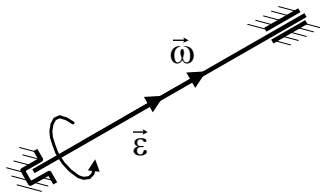


Рис. 7.30. Кутова швидкість і кутове прискорення при обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі

Лекція 21

г) Лінійна швидкість точки тіла

Нехай тіло G здійснює сферичний рух у нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$. Положення т. M в нерухомій системі координат визначає радіус-вектор \vec{r} , а в рухомій ($Oxyz$) – вектор $\vec{\rho}$ (див. рис. 7.31)

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

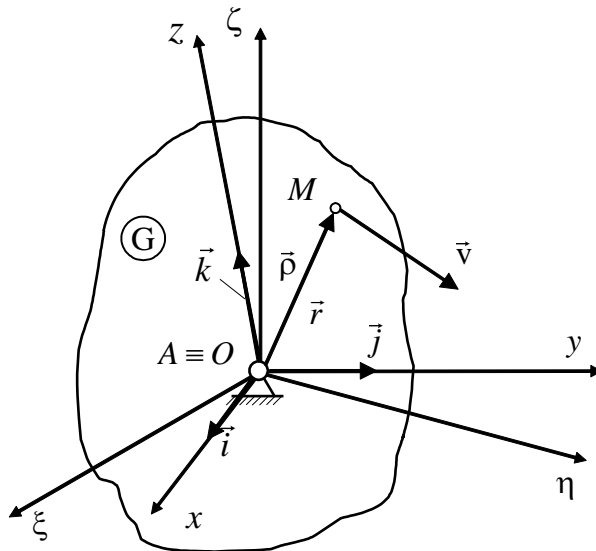


Рис. 7.31. До визначення лінійної швидкості точки твердого тіла, що виконує сферичний рух

Скористаємось означенням швидкості при векторному способі опису руху точки (формулою Бура) за умови, що $\frac{d'\vec{\rho}}{dt} = \vec{0}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \quad (7.63)$$

де вектор $\vec{\omega}$ визначається через свої проекції за допомогою рівнянь Ейлера (див. табл. 7.2 попередньої лекції).

Миттєва вісь обертання

Миттєвою віссю обертання називається пряма, що проходить через нерухому точку і яка характеризується тим, що всі точки цієї прямої мають нульові швидкості.

Отримаємо рівняння миттєвої осі обертання тіла, яке здійснює сферичний рух.

Оскільки за рівнянням (7.63) $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$, тоді для точок, що мають нульову швидкість, матимемо

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{0}. \quad (7.64)$$

Векторне рівняння (7.64) описує пряму, яка являє собою геометричне місце точок, швидкості яких дорівнюють нулю, тобто миттєву вісь обертання, тоді

$$(\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k} = \vec{0},$$

звідки

$$\begin{cases} \omega_y z - \omega_z y = 0, \\ \omega_z x - \omega_x z = 0, \\ \omega_x y - \omega_y x = 0. \end{cases}$$

Остаточно маємо

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

- рівняння миттєвої осі обертання в рухомій системі координат.

Аналогічним чином із виразу (7.64) можна отримати рівняння миттєвої осі обертання в нерухомій системі координат, яке має вигляд

$$\frac{\xi}{\omega_\xi} = \frac{\eta}{\omega_\eta} = \frac{\zeta}{\omega_\zeta}.$$

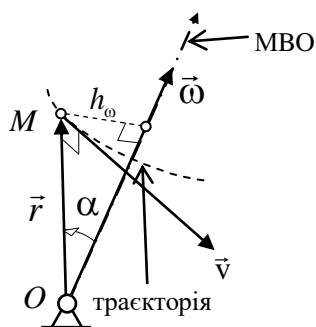
Введемо *поняття миттєво обертального руху тіла*, розуміючи під цим такий рух тіла, при якому в даний момент часу розподіл швидкостей точок тіла збігається з їх розподілом для тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі.

Теорема: в кожний момент часу сферичний рух твердого тіла є миттєво обертальним навколо миттєвої осі обертання з миттєвою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, до того ж миттєва вісь обертання проходить через нерухому точку тіла і збігається з лінією дії вектора $\vec{\omega}$.

Оскільки $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\phi} \vec{j}$, тому швидкість будь-якої точки M тіла можна визначити за формулою Ейлера ($\vec{\rho} \equiv \vec{r}$)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\dot{\psi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\phi} \vec{j}) \times \vec{r}.$$

В цьому разі $v = \omega r \sin \alpha$, і остаточно матимемо



$$v = \omega h_\omega,$$

де $h_\omega = r \sin \alpha$ - найкоротша відстань від точки до МВО. Зауважимо, що $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, та $\vec{v} \perp \vec{r}$ (рис. 7.32).

У конкретних задачах МВО можна знайти із фізичних міркувань. Якщо тіло торкається своєю точкою нерухомої поверхні іншого тіла, тоді за умови відсутності проковзування МВО проходить через цю точку дотику і нерухому точку в розглядуваний момент часу.

Рис. 7.32. Напрямок швидкості

МВО також можна визначити, якщо відома ще одна точка тіла, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. З'єднуючи цю точку з нерухомою точкою тіла, отримуємо миттєву вісь обертання. Нарешті, якщо відомі напрямки швидкостей двох

точок тіла, тоді, за умови відсутності проковзування, положення МВО визначається як результат перетину площин, перпендикулярних до векторів швидкостей розглядуваних точок.

д) Розподіл лінійних прискорень точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки

Знайдемо лінійне прискорення довільної т. M твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, взявши першу похідну від швидкості \vec{v} цієї точки за часом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_{OM}^{об} + \vec{a}_{OM}^{до} \quad (7.65)$$

Це співвідношення виражає теорему про розподіл прискорень точок тіла, що здійснює сферичний рух.

Теорема: прискорення довільної точки тіла, яке виконує сферичний рух, дорівнює векторній сумі обертальної та доосьової його складових, тобто

$$\vec{a} = \vec{a}_{OM}^{об} + \vec{a}_{OM}^{до}. \quad (7.66)$$

Розглянемо більш детально вектори $\vec{a}_{OM}^{об}$ та $\vec{a}_{OM}^{до}$ у виразі (7.66).

Для цього вектор $\vec{\varepsilon}$, який напрямлений по дотичній до годографа вектора $\vec{\omega}$, перенесемо паралельно до самого себе в нерухому точку (рис. 7.33). Потім через нього проведемо пряму, яка буде називатися *миттєвою віссю кутового прискорення*.

Модуль і напрямок складових $\vec{a}_{OM}^{об}$ та $\vec{a}_{OM}^{до}$ повністю визначається векторними добутками, якими утворюються їхні вирази (7.65).

Так обертальна складова прискорення $\vec{a}_{OM}^{об} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ являє собою вектор, перпендикулярний до площини, що проходить через вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ і радіус-вектор \vec{r} точки M .

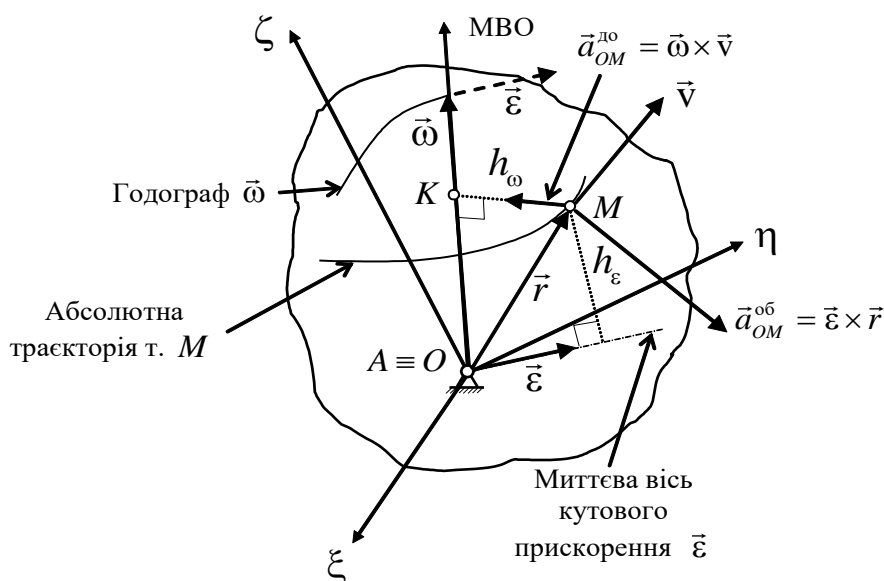


Рис. 7.33. Складові прискорення \vec{a} та миттєва вісь кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$

Модуль обертальної складової \vec{a}_{OM}^{ob} прискорення т. M можна визначити у вигляді

$$a_{OM}^{ob} = \varepsilon h_{\varepsilon} = \varepsilon r \sin(\vec{\varepsilon}; \vec{r}),$$

де h_{ε} - найкоротша відстань від точки M до миттєвої осі кутового прискорення; а її проекції

матимуть вигляд

$$(a_{OM}^{ob})_x = z\varepsilon_y - y\varepsilon_z; \quad (a_{OM}^{ob})_y = x\varepsilon_z - z\varepsilon_x; \quad (a_{OM}^{ob})_z = y\varepsilon_x - x\varepsilon_y.$$

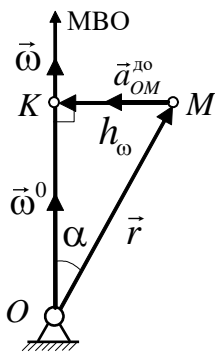


Рис. 7.34. Доосьова складова прискорення

Розглянемо доосьову складову \vec{a}_{OM}^{do} прискорення

$$\begin{aligned} \vec{a}_{OM}^{do} &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r} = \omega \vec{\omega}^0 (\omega \vec{\omega}^0 \cdot \vec{r}) \\ &= \omega^2 [\vec{\omega}^0 (\vec{\omega}^0 \cdot \vec{r}) - \vec{r}] = \omega^2 (\vec{OK} - \vec{r}) = \omega^2 \vec{MK} \end{aligned}$$

де $\vec{\omega}^0$ - одиничний вектор напрямку вектора

Отриманий вираз (7.67) вказує на те, що вектор \vec{a}_{OM}^{do} спрямований вздовж лінійної осі обертання (MBO), тобто за вектором \vec{MK} .

Лекція 22

Тема 3.7. Складний рух твердого тіла

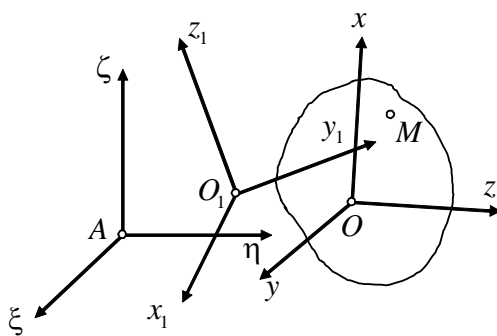
7.5. Складний рух твердого тіла

Тверде тіло може приймати участь в декількох рухах одночасно.

Утворення із різних найпростіших рухів твердого тіла деякого його складного руху і вивчення результатів такої побудови є задачею додавання рухів твердого тіла (*синтеза рухів*).

Обмежимося розкладанням складного руху твердого тіла на два складових рухи. Для цього введемо три системи координат:

- нерухому $A\xi\eta\zeta$;
- рухому $Oxyz$, незмінно зв'язану з твердим тілом, та
- рухому $O_1x_1y_1z_1$, відносно якої рухається тверде тіло і яка, в свою чергу, рухається відносно нерухомої системи координат.



Введемо необхідні поняття (рис. 7.35).

- 1) Рух твердого тіла відносно нерухомої системи координат називається *абсолютним*.
- 2) Рух цього ж тіла відносно $O_1x_1y_1z_1$ називається *відносним*.
- 3) Рух рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ відносно нерухомої $A\xi\eta\zeta$ називається *переносним*.

Рис. 7.35. Складний рух твердого тіла

Відповідно до вказаних рухів розглядаються абсолютні, відносні та переносні швидкості та прискорення точок твердого тіла: $\vec{v}_a, \vec{v}_r, \vec{v}_e$; $\vec{a}_a, \vec{a}_r, \vec{a}_e$, а також абсолютні, відносні та переносні кутові швидкості та кутові прискорення твердого тіла: $\vec{\omega}_a, \vec{\omega}_r, \vec{\omega}_e$; $\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_r, \vec{\varepsilon}_e$.

Основна задача кінематики складного руху твердого тіла полягає в наступному.

При різних окремих припущеннях щодо характеру відносного і переносного рухів знайти вид того вислідного складного руху, якому відповідає розподіл абсолютних швидкостей точок твердого тіла в даний момент часу.

Один з таких рухів, який розглядаємо по відношенню до $O_1x_1y_1z_1$, приймаємо за відносний, а інший рух, який розглядаємо по відношенню до $A\xi\eta\zeta$ - за абсолютний.

а) Додавання обертань твердого тіла навколо осей, що перетинаються

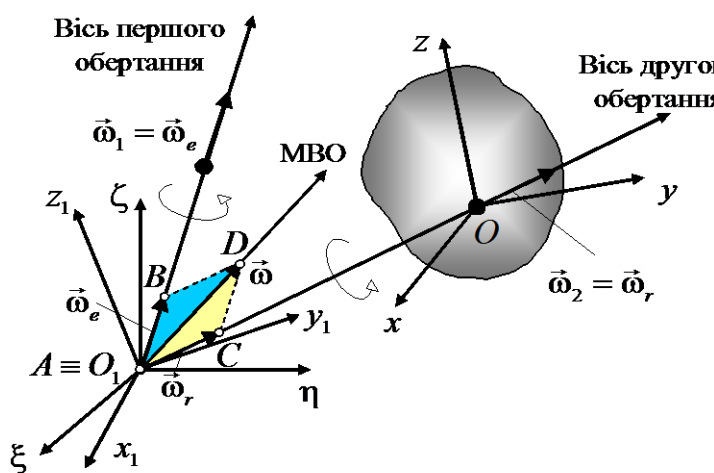
Теорема: при додаванні двох миттєво обертальних рухів твердого тіла навколо осей, що перетинаються, які приймаються за відносний і переносний рухи, виникає абсолютний миттєво обертальний рух навколо осі, яка проходить через точку перетину осей розглядуваних обертань, і ця вісь напрямлена вздовж діагоналі паралелограма, побудованого на миттєвих кутових швидкостях складових рухів як на сторонах. При цьому абсолютна миттєва кутова швидкість дорівнює векторній сумі миттєвих кутових швидкостей складових рухів.

Доведення

Нехай тверде тіло, з яким зв'язана $Oxyz$, здійснює миттєво обертальний рух відносно

$O_1x_1y_1z_1$, яка, в свою чергу, виконує миттєво обертальний рух відносно $A\xi\eta\zeta$.
Вектори $\vec{\omega}_1$ і

$\vec{\omega}_2$ як ковзні переносимо до т. O_1 (див. рис. 7.36).



Будуємо паралелограм O_1BDC на векторах $\vec{\omega}_e$ і $\vec{\omega}_r$ як на сторонах.

Визначимо швидкість т. D , використовуючи теорему про додавання швидкостей точки при складному русі, -

$$\begin{aligned}\vec{v}_{Da} &= \vec{v}_{De} + \vec{v}_{Dr} = \\ &= \vec{\omega}_e \times \overline{O_1D} + \vec{\omega}_r \times \overline{O_1D} = \vec{0},\end{aligned}$$

оскільки розглядувані векторні добутки однакові за модулем, тому що дорівнюють подвоєним площам рівних трикутників ($\Delta O_1BD = \Delta O_1DC$), а вектори \vec{v}_{De} і \vec{v}_{Dr} колінеарні та напрямлені в протилежні боки.

Рис. 7.36. Додавання обертань навколо перетинних осей

Таким чином, пряма, яка проведена через т. O_1 - точку перетину розглядуваних миттєвих осей обертання, - і т. D (інша нерухома точка) є миттєвою віссю (абсолютного) обертання, тобто миттєвою віссю вислідного обертання. Тоді абсолютна швидкість будь-якої точки M визначиться так

$$\vec{v}_{Ma} = \vec{\omega} \times \overline{O_1M},$$

де $\vec{\omega} = \vec{\omega}_a$, або з іншого боку наступним чином:

$$\vec{v}_{Ma} = \vec{v}_{Me} + \vec{v}_{Mr} = \vec{\omega}_e \times \overline{O_1M} + \vec{\omega}_r \times \overline{O_1M}.$$

Порівнюючи ці вирази матимемо

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{O_1 M} = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{O_1 M},$$

$$\text{звідки } \vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r \text{ або } \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2,$$

щр і треба було довести.

б) Додавання обертань твердого тіла навколо паралельних осей

Нехай тіло G здійснює миттєво обертальний рух з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$ відносно $O_1 x_1 y_1 z_1$, а система координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ здійснює миттєво обертальний рух з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ відносно нерухомої системи координат $A\xi\eta\zeta$. Припустимо, щр $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ колінеарні (тобто можуть бути одного або протилежних напрямків).

Теорема: сукупність двох миттєво обертальних рухів навколо паралельних осей за умови, щр $\omega_1 \neq \omega_2$ за величиною і у разі однакових і протилежних напрямків $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$, еквівалентна одному миттєво обертальному рухові навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю, щр дорівнює векторній сумі миттєвих кутових швидкостей складових рухів. В цьому разі МВО ділить відстань між осями розглядуваних обертань на частини, обернено пропорційні до модулів кутових швидкостей, зовнішнім чином для випадку, коли $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ мають різні напрямки, і внутрішнім, якщо $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ мають однаковий напрямок.

Д о в е д е н н я

Визначимо абсолютну швидкість т. M за теоремою про додавання швидкостей

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{Mr} + \vec{v}_{Me} = \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O_1 M}.$$

Швидкості \vec{v}_{Me} та \vec{v}_{Mr} розташовані в площині, яка є перпендикулярною до осей z_1 і z . Таким чином \vec{v}_M лежить у площині, перпендикулярній до цих осей. Оскільки т. M - довільна, то це означає, щр тіло приймає участь в плоскому русі. Визначимо миттєвий центр швидкостей для випадку векторів $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ одного напрямку (рис. 7.37).

Очевидно, щр якщо т. M лежить всередині відрізка $O_1 O$, тоді вектори \vec{v}_{Me} і \vec{v}_{Mr} колінеарні і напрямлені в різні боки. Таким чином, для точки P маємо

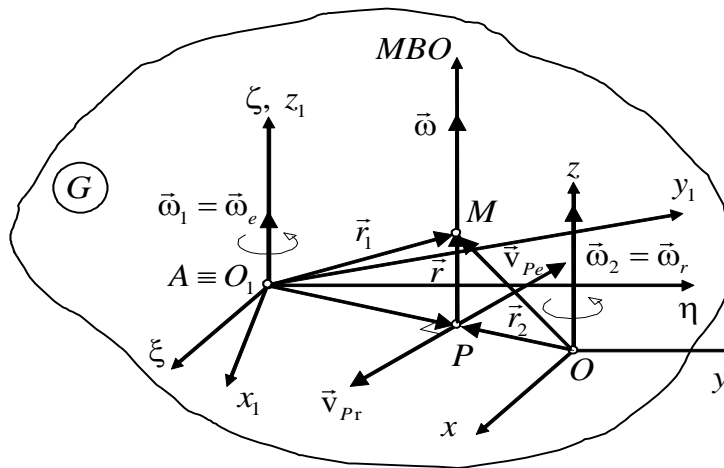
$$\vec{v}_{Pa} = \vec{v}_{Pr} + \vec{v}_{Pe} = \vec{0},$$

звідки випливає, щр $v_{Pr} = v_{Pe}$, або $\omega_r OP = \omega_e O_1 P$, $\omega_2 OP = \omega_1 O_1 P$, і, нарешті

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{OP}{O_1 P}}.$$

Далі

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \vec{\omega}_e \times (\overrightarrow{O_1 P} + \vec{r}) + \vec{\omega}_r \times (\overrightarrow{OP} + \vec{r}) = \vec{\omega}_e \times \overrightarrow{O_1 P} + \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_r \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega}_r \times \vec{r} = \\ &= \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_r \times \vec{r} = (\vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r) \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}. \end{aligned}$$



Таким чином маємо

$$\vec{v}_M = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r},$$

де \vec{r} - радіус-вектор т. M відносно миттєвого центра швидкостей, а з іншого боку

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Звідси випливає, що

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2,$$

що і треба було довести.

Розглянемо випадок протилежного напрямку $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ (рис. 7.38); всі висновки зберігаються.

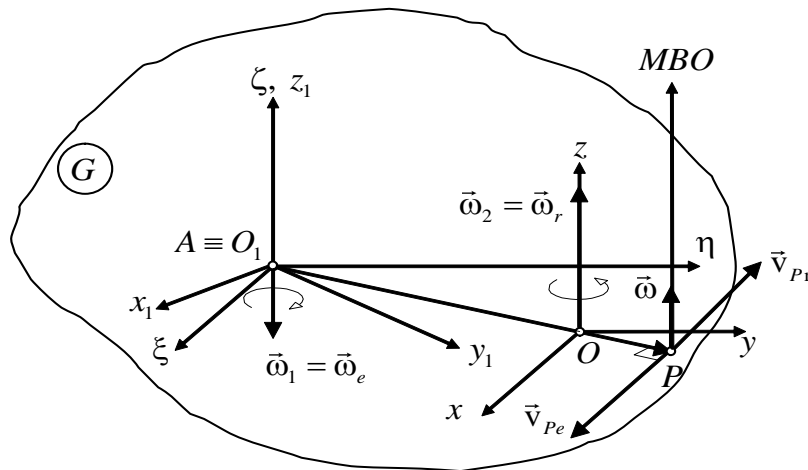


Рис. 7.38. Додавання обертань, що напрямлені в протилежні боки

Тут, як і раніше, маємо

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{OP}{O_1P},$$

але $\omega = |\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2|$, причому вектор $\vec{\omega}$ напрямлений в бік більшої з кутових швидкостей $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$.

в) Метод зупинення

Часто в інженерній практиці зустрічаються досить складні механізми, що містять колеса, центральні осі обертання яких переміщуються у просторі. Серед них найбільш поширені *планетарні механізми*. Планетарним або епіциклічним механізмом називають зачеплення двох або декількох коліс, із яких одне колесо нерухоме або обертається навколо нерухомої осі, а інші колеса обертаються навколо осей, закріплених на рухомій ланці, яка називається *водилом* (стрижень OA на рис. 7.39). Колеса, зв'язані з водилом, що обертається, називаються *сателітами*.

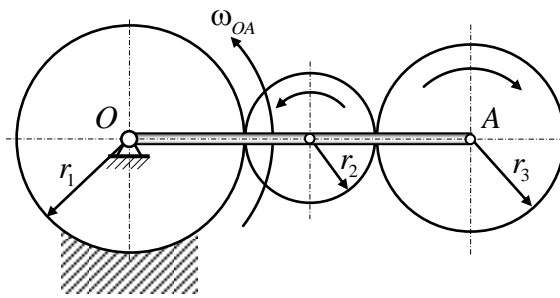


Рис. 7.39. Планетарний механізм (редуктор)

При розв'язанні задач, в яких розглядаються зовнішні або внутрішні зачеплення зубчастих коліс планетарних механізмів, тобто коли відбувається складання обертань навколо паралельних або перетинних осей, зручно користуватись *методом зупинення*.

Цей метод полягає у тому, що уявно надають всій системі такий додатковий переносний рух, при якому одна з ланок стає «нерухомою» в певний момент часу. Ланкою, що «зупиняється», вибирають ту, після зупинення якої інші ланки будуть обертатися лише навколо нерухомих осей, тобто планетарний механізм буде являти собою просту передачу. Найчастіше такою ланкою є водило.

Значення миттєвих кутових швидкостей всіх ланок механізму до і після зупинення вибраної ланки доцільно записати у вигляді таблиці (див. табл. 7.3). При цьому у першому рядку розміщуються абсолютні кутові швидкості всіх ланок до зупинення, а в другому – відносні кутові швидкості, що отримані після зупинення відповідної ланки.

Складемо, наприклад, таку таблицю для механізму, наведеному на рис. 7.39.

Оскільки переносний рух колесам надає водило OA , то його кутова швидкість ω_{OA} для всіх коліс є переносною. Отже віднімаючи від абсолютних кутових швидкостей переносну $\omega_e = \omega_{OA}$ отримаємо відносні кутові швидкості коліс.

Таблиця 7.3. До методу зупинення

| Ланки механізму: | | OA | 1 | 2 | 3 |
|-----------------------------|------------------------------|---------------|----------------|--------------------------|--------------------------|
| Значення кутових швидкостей | ω_a (до зупинення) | ω_{OA} | 0 | ω_2 | ω_3 |
| | ω_r (після зупинення) | 0 | $-\omega_{OA}$ | $\omega_2 - \omega_{OA}$ | $\omega_3 - \omega_{OA}$ |

Далі для елементів другого рядка (відносних кутових швидкостей) можна використати формули Вілліса (7.23), оскільки після зупинення всі передачі стали простими:

– для зчеплення коліс 1 – 2 маємо

$$\frac{\omega_2 - \omega_{OA}}{-\omega_{OA}} = -\frac{r_1}{r_2},$$

– для зчеплення коліс 2 – 3 отримаємо

$$\frac{\omega_3 - \omega_{OA}}{\omega_2 - \omega_{OA}} = -\frac{r_2}{r_3}.$$

Звідси можна визначити кутові швидкості ω_2 і ω_3 .

Лекція 23

8. Порівняльний аналіз кінематичних характеристик точок і твердих тіл при різних видах руху

Надамо кінематичні характеристики точок і твердих тіл при різних видах руху у вигляді наступної таблиці.

Таблиця 1. До порівняльного аналізу кінематичних характеристик точок і твердих тіл при різних видах руху

| Вид руху твердого тіла | Число степенів вільності | Вибір полюса (т. O) | Кінематичні рівняння руху тіла | Кутова швидкість тіла | Кутове прискорення тіла | Лінійна швидкість | Лінійне прискорення |
|---|--------------------------------|--|--|---|--|--|---|
| Поступальний | 3 | Довільна точка тіла | $\xi_o = \xi_o(t)$, $\eta_o = \eta_o(t)$, $\zeta_o = \zeta_o(t)$ | $\vec{\omega} \equiv \vec{0}$ | $\vec{\varepsilon} \equiv \vec{0}$ | $\vec{v}_M = \vec{v}_O$ | $\vec{a}_M = \vec{a}_O$ |
| Обертальний навколо нерухомої осі | 1 | Довільна точка на осі обертання тіла | $\varphi = \varphi(t)$ | $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$, де $\omega_z = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \vec{j} = \dot{\varphi}$ | $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k}$, де $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$ | $\vec{v}_M = \vec{v}_{OM} =$ $= \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}$ | $\vec{a}_M = \vec{a}_{OM}^{об} + \vec{a}_{OM}^{до} =$ $= \vec{a}_{M\tau} + \vec{a}_{Mn}$, де $\vec{a}_{OM}^{об} = \vec{a}_{M\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM}$, $\vec{a}_{OM}^{до} = \vec{a}_{Mn} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) =$ $= \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ |
| Плоскопара- лельний | 3 | Довільна точка тіла | $\xi_o = \xi_o(t)$, $\eta_o = \eta_o(t)$, | $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k}$, де | $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \vec{k}$, де | $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM}$, де | $\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{OM}^{об} + \vec{a}_{OM}^{до}$, де |

| | | | | | | | |
|-----------|---|---------------------|---|---|---|--|---|
| | | | $\varphi = \varphi(t)$ | $\omega_z = \frac{d\vec{i}}{dt} \cdot \vec{j} = \dot{\varphi}$ | $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$ | $\vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}$ | $\vec{a}_{OM}^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM},$ $\vec{a}_{OM}^{\text{до}} \equiv \vec{a}_{OM}^{\text{ц}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{OM} =$ $= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM})$ |
| Сферичний | 3 | Довільна точка тіла | $\psi = \psi(t),$ $\theta = \theta(t),$ $\varphi = \varphi(t)$ | $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k},$ де $\begin{cases} \omega_x = -\dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta + \dot{\varphi}, \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta + \dot{\theta} \sin \varphi; \end{cases}$ та $\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{i}_1 + \omega_\eta \vec{j}_1 + \omega_\zeta \vec{k}_1,$ де $\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\varphi} \sin \psi \cos \theta, \\ \omega_\eta = \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \cos \psi \cos \theta, \\ \omega_\zeta = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \sin \theta; \end{cases}$ або $\vec{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi}$ | $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k},$ де $\varepsilon_x = \dot{\omega}_x, \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y,$ $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z$ та $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_\xi \vec{i}_1 + \varepsilon_\eta \vec{j}_1 + \varepsilon_\zeta \vec{k}_1,$ де $\varepsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi, \quad \varepsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta,$ $\varepsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta$ | $\vec{v}_M = \vec{v}_{OM} =$ $= \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}$ | $\vec{a}_M = \vec{a}_{OM}^{\text{об}} + \vec{a}_{OM}^{\text{до}},$ де $\vec{a}_{OM}^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM},$ $\vec{a}_{OM}^{\text{до}} = \vec{\omega} \times \vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM})$ |
| Вільний | 6 | Довільна точка тіла | $\xi_o = \xi_o(t),$ $\eta_o = \eta_o(t),$ $\zeta_o = \zeta_o(t),$ $\psi = \psi(t),$ $\theta = \theta(t),$ $\varphi = \varphi(t)$ | Формули такі, як і за сферичного руху | Формули такі, як і за сферичного руху | $\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{OM},$ де $\vec{v}_{OM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM}$ | $\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{OM}^{\text{об}} + \vec{a}_{OM}^{\text{до}},$ де $\vec{a}_{OM}^{\text{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OM},$ $\vec{a}_{OM}^{\text{до}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{OM})$ |

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
3. [10-11-090.doc](#) : Теоретична механіка. Кінематика. Динаміка та аналітична механіка [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Г. Я. Міщук, Н. І. Стефан ; НТУУ «КПІ». – Електронні текстові дані (1 файл: 108.4 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/859>
4. [10-11-174.doc](#) :Теоретична механіка [Електронний ресурс] : методичні вказівки для самостійної роботи над тестами для студентів інженерних спеціальностей / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,40 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/769>
5. [9-10-171.rtf](#): Теоретична механіка. Предмет теоретичної механіки [Електронний ресурс] : методичні вказівки до самостійної роботи студентів напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» / НТУУ «КПІ» ; уклад. Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко – Електронні текстові дані (1 файл: 707 Кбайт). - Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана. - Доступ: <http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/478>
6. [9-10-148.docx](#) : Теоретична механіка. Кінематика точки [Електронний ресурс] : методичні вказівки для самостійної роботи студентів напрямів підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування» / НТУУ «КПІ» ; уклад. Н. І. Штефан. – Електронні текстові дані (1 файл: 222 Кбайт). - Київ : НТУУ «КПІ», 2010. - Назва з екрана.- Доступ: <http://library.ntu-kpi.kiev.ua:8080/handle/123456789/442>
7. [11-12-190.doc](#) : Теоретична механіка. Найпростіші рухи твердого тіла. Складний рух точки [Електронний ресурс] : методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи студентів технічних напрямів підготовки / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,81 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – Назва з екрана. - Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/1886>

8. Теоретична механіка. Статика. Кінематика [Електронний ресурс] : методичні вказівки до виконання розрахунково-графічної роботи для студентів технічних напрямів підготовки денної та заочної форм навчання / НТУУ «КПІ» ; уклад. В. Г. Савін, Н. І. Штефан, В. М. Федоров. – Електронні текстові дані (1 файл: 7,45 Мбайт). – Київ : НТУУ «КПІ», 2012. – 57 с. – Назва з екрана. – Доступ: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/2482>
20. Дистанційний курс . Електронний курс лекцій: Статика. Кінематика / для студентів технічних напрямків підготовки / Уклад. Н. І. Штефан, . О. С. Апостолук, Н. В. Гнатейко , В. Г. Савін - Доступ: <http://moodle.udec.ntu-kpi.kiev.ua/moodle/course/view.php?id=345>
24. Кильчевский Н. А., Ремизова Н. И., Кильчевская Е. Н. Основы теоретической механики. – К.: Вища школа, 1986. – 296 с.